ELEMENTI

DI

GEOMETRIA PROJETTIVA

DI

LUIGI CREMONA

PROFESSORE NEL R. ISTITUTO TECNICO SUPERIORE DI MILANO.

AD USO DEGLI ISTITUTI TECNICI

DEL REGNO D'ITALIA

Vol. I (con Atlante separato)
contenente la materia assegnata dal Programma dell' ottobre 1871
al 1° corso del 2° biennio.

1873

G. B. PARAVIA E COMP.

ROMA - TORINO - MILANO - FIRENZE.

PREFAZIONE.

Amplissima et pulcherrima scientia figurarum. At quam est inepte sortita nomen Geometriæ!

NICODEMUS FRISCHLINUS *in Dialogo primo.*

Perspectivæ methodus, quâ nec inter inventas nec inter inventu possibiles ulla compendiosior esse videtur...

B. PASCAL *in lit. ad Acad. Paris.* 1654.

Da veniam scriptis, quorum non gloria nobis
Causa, sed utilitas officiumque fuit.

OVIDIUS *in Fastis*, III, 9.

Questo libro non è stato scritto per coloro che hanno l'alta missione di promuovere la scienza; eglino non ci troverebbero alcuna novità, nè di dottrine, nè di metodi. Le proposizioni sono tutte di vecchia data, tanto che per non poche bisognerebbe risalire ai geometri della più remota antichità; e ciascuno potrà rintracciarle in EUCLIDE (285 a. C.), in APOLLONIO di Perga (247 a. C.), in PAPPO d'Alessandria (4° sec. d. C.), in DESARGUES di Lione (1593-1662), in PASCAL (1623-1662), in DELAHIRE (1640-1718), in NEWTON (1642-1727), in MACLAURIN (1698-1746), in J. H. LAMBERT (1728-1777),... Le teorie ed i metodi, che di queste proposizioni fanno un insieme omogeneo ed armonico, soglion essere detti moderni, perchè creati o perfezionati da geometri più vicini a noi, come CARNOT, BRIANCHON, PONCELET, MÖBIUS, STEINER, CHASLES, STAUDT...: le opere de' quali però vennero in luce dentro la prima metà del nostro secolo.

Diffondere nelle scuole italiane la cognizione di queste peregrine ed utili teorie: ecco tutto lo scopo del mio lavoro.

Ma non si creda che in Italia non siansi già fatti lodevoli sforzi per tener dietro ai progressi della scienza geometrica. G. BELLAVITIS è stato, se non erro, il primo che li additasse alla gioventù studiosa, col suo *Saggio di geometria derivata* ([1]), che fu poi seguito da molti altri scritti; ed a Napoli, N. TRUDI ([2]) risolveva i quesiti di un celebre programma « destinato a promuovere e comparare i metodi per l'invenzione geometrica ». Nel 1854, s'era già introdotto nell'università di Pavia un corso di geometria superiore, e la cattedra ne fu poi istituita, a proposta del professore BRIOSCHI, anche presso le altre nostre maggiori università, quando l'Italia ebbe riconquistata la sua indipendenza politica ([3]). Chi scrive queste pagine insegnò per sei anni la stessa scienza a Bologna, e ne applicò i metodi alla geometria descrittiva ([4]); più tardi, trasferito all'Istituto tecnico superiore di Milano, e invitato dal direttore sig. BRIOSCHI a darvi un corso di statica grafica, volle far prima, a modo di necessaria preparazione, un buon numero di lezioni sulla geometria di posizione, o geometria projettiva ([5]).

([1]) Nuovi Saggi dell'Accademia di Padova, vol. 4° (1838), p. 243-288.

([2]) *Produzioni relative al programma di tre quistioni geometriche, proposto dal prof. V. Flauti nell'aprile* 1839 (Napoli, 1840–41).

Cito in via d'esempio BELLAVITIS e TRUDI, ma non intendo escludere che altri in Italia siasi occupato di geometria projettiva sino da quel tempo. Anzi chieggo venia fin d'ora pei nomi che avrò dimenticato: creda il benevolo lettore che non lo faccio con intenzione; e d'altronde non mi propongo affatto di dare un sunto storico dei progressi della scienza, nemmeno limitatamente all'Italia.

([3]) A Napoli salì su quella cattedra il BATTAGLINI, del quale tutti conoscono l'ingegno e l'operosità. Perchè quell'illustre e doviziosa città ha lasciato partire di là il valente professore?...

([4]) Seguendo un concetto già balenato ad altri: veggasi BELLAVITIS, *Lezioni di geometria descrittiva* (Padova 1851). Ad un concetto analogo è informata l'eccellente opera del prof. FIEDLER, *Die darstellende Geometrie* (Leipzig 1871), della quale si sta ora pubblicando a Firenze una traduzione italiana, per cura dei signori E. PADOVA e A. SAYNO, ad uso delle scuole politecniche.

([5]) Per appunto come a Zurigo il sig. REYE faceva un corso di *Geometrie der Lage*, per preparare gli studenti di quella scuola politecnica ad udire le ezioni del prof. CULMANN, il creatore della statica grafica.

E così s'è ottenuto che ogni anno una grossa schiera di giovani fosse addestrata ai metodi moderni e ne apprendesse l'uso nelle varie parti del disegno tecnico.

Ma ciò non doveva bastare. Tanta è la semplicità di questi metodi che, mentre hanno in sè una grandissima fecondità di risultati e di applicazioni, nessuna parte delle matematiche offre maggiore agevolezza ad essere appresa, e domanda minor corredo di cognizioni preliminari. A persuadersi di ciò, basti considerare che STAUDT potè scrivere la sua *Geometrie der Lage* (1847) senza presupporre alcuna nozione di geometria elementare; che se questo libro eccellente non ebbe maggior diffusione, può darsene colpa all'assoluta mancanza di figure illustrative ed allo stile soverchiamente arido e stringato. Lo stesso pensiero mosse altri scrittori ([1]), i quali, dopo avere stabilito i concetti fondamentali di spazio, superficie, linea, punto, retta e piano, misero innanzi a dirittura quelli della collineazione e della reciprocità. E forse accadrà che di qui balzi fuori in un giorno non lontano la soluzione del problema dell'insegnamento elementare della geometria: allora, ma (s'io non erro) allora soltanto, noi avremo qualcosa che meriti d'essere sostituita al metodo euclideo, l'introduzione del quale ne' nostri licei fu così vivamente e ingiustamente oppugnata ([2]).

([1]) Per es. E. MÜLLER nei suoi *Elemente der Geometrie streng systematisch dargestellt* (Braunschweig 1869).

([2]) La smania di biasimare ogni atto del governo trasse anche persone rispettabili a stampare cose stravaganti e false intorno agli ordini scolastici dell'Inghilterra. Cotesti appassionati censori non vollero riconoscere il sommo beneficio che la riforma del 1867 ha recato, cioè quello di toglier via certi pessimi libri da molti licei del regno; non posero mente a ciò, che la libertà didattica concessa ai nostri professori e il sistema degli esami levano alla riforma ogni carattere di tirannia, e rendono assurdo il paragone colle scuole inglesi; finalmente non ci seppero mai dire qual metodo, idoneo a raggiungere i fini dell'istruzione secondaria classica, sarebbe da adottarsi in luogo dell'euclideo. — Taccio di quelle critiche che furono inspirate da basso interesse o da livori di parte: si tentò, ma invano, di gettare fango sui nomi degli uomini più insigni per meriti scientifici e per virtù pubbliche e private.

Cotesta naturale facilità delle dottrine costituenti la geometria projettiva, facilità che le rende atte ad entrare negli elementi della scienza, venne sì bene compresa, che in ogni paese sorsero uomini autorevoli a chiedere che fossero ammesse nei quadri delle materie scolastiche. Più specialmente nella dotta ed operosa Germania si vedono ogni dì venire in luce nuovi libri, che espongono la geometria projettiva o da sè o insieme colla geometria ordinaria, sotto forma man mano più semplice, più elementare, più accessibile agli ingegni anche mediocri: i quali libri, perchè destinati ai ginnasi ed alle scuole reali, mostrano come la *neuere Geometrie* sempre più guadagni terreno nell' istruzione secondaria. Opere siffatte, benchè con intenti meno definiti, sono state pubblicate anche in Inghilterra ed in Francia.

A cotal movimento non poteva rimanere indifferente l'Italia e non rimase: anzi, fra noi, più prontamente che altrove, i provvedimenti governativi risposero ai voti degli uomini di scienza. Nel 1871, essendosi deliberata dal Ministero dell'agricoltura, del commercio e dell'industria una radicale riforma degli istituti tecnici, che da esso dipendono, ed un' importante sezione de' quali è volta a preparare la gioventù che più tardi entrerà nelle scuole politecniche, la geometria projettiva è stata risolutamente innestata ne' programmi del secondo biennio; e fu anche prescritto che ai metodi di essa s'informi la geometria descrittiva. Quanto bene ridonderà alle scuole da questo provvedimento, purchè sia attuato con sincerità e con perseveranza, può imaginarselo chiunque voglia riflettere ai presenti bisogni dell' istruzione politecnica. La vigorosa e nutritiva educazione geometrica, che i giovanetti riceveranno per tal modo negl'istituti tecnici, centuplicherà l'efficacia delle discipline applicative a cui dovranno attendere nelle scuole superiori, e allora il nostro ordinamento scolastico per la formazione degli

ingegneri potrà ben reggere il confronto colle migliori istituzioni straniere. E non crediamo troppo superbo il presagio che altri Stati abbiano a seguire il nostro esempio in quest'ardita innovazione.

Se non che, il nuovo programma resterebbe forse lettera morta, ove a docenti ed a scolari non si apprestasse un opportuno libro di testo. Indiscreta pretesa sarebbe stata quella di voler rimandare tutt'i professori degl'istituti tecnici, specialmente coloro cui mancò sin qui l'occasione d'erudirsi in coteste materie, alle fonti straniere: ma ove pure ciò paresse ragionevole, non sarebbesi provveduto ai discenti, i quali, privi d'un testo, si vedrebbero costretti a spendere in faticose, imperfette e spesso sterili redazioni di sunti quel tempo che assai più fruttuosamente può essere volto allo studio ed alle esercitazioni grafiche.

Fare un libro elementare, un libro che schiettamente si adatti alle scuole, è cosa difficilissima e che richiede molto e molto tempo. Per chi vive di scienza, tale impresa è piena di dubbi, di sacrifizi e di amarezze: per mesi e mesi, ed anche per anni, dovrete lasciar da canto i più cari studi, chiudere negli scaffali e nascondere a voi stesso i libri più nuovi e più curiosi, mettervi a litigare coll'abbiccì della scienza; fare, disfare e rifare il vostro lavoro, tre, quattro volte, insomma sciupare il meglio delle vostre forze. Se riuscite, gloria non ne avrete: già non la speravate nemmeno, chè a siffatte fatiche altri non ci si sobbarca che per beneficio altrui. Di lucro non se ne parla; in Italia non accade sempre che un libro non pessimo trovi fortuna; sibbene, potete star certo che da qualche parte usciranno voci ad accusarvi di basso traffico.

Incredibile ma vero. Per affrontare simili casi senza perdervi la quiete dell'animo, bisognerebbe possedere un petto di bronzo: e non a tutti fu dato. Così avviene che bene spesso chi ha la coscienza di poter fare un libro utile nol fa.

Siccome però io mi son messo dentro a cotesta penosa impresa, così debbo dirne le ragioni. Quel libro che sopra ho dimostrato esser necessario perchè si possano attuare i nuovi programmi, pensai che toccasse a me di farlo; a me che di questi studi sempre feci l'occupazione mia prediletta, che sempre cercai di promuoverne la diffusione nella scuola e cogli scritti, e che vivamente desiderai la riforma che testè il governo ha provvidamente decretata.

Ecco adunque dond'è nato questo libro, ch'io dedico ai professori degli istituti tecnici, particolarmente ai giovani che hanno fede nel moto progressivo della scienza. Esso non ha punto la pretesa di passare per un lavoro originale; ad altro non aspira che ad essere considerato come un trattato elementare, scritto a bella posta per le scuole italiane e propriamente nell'intento di rispondere al nuovo programma di geometria pel primo corso del secondo biennio degli istituti tecnici. A questo terrà dietro un altro volume, che conterrà le materie assegnate al secondo corso.

Diversi nomi erano stati dati a quell'insieme di dottrine geometriche di cui qui si pongono i primi fondamenti. Non mi piacque accogliere quello di geometria superiore *(Géométrie supérieure, höhere Geometrie)*, perchè in sostanza ciò che una volta potè parere elevato, ora è divenuto elementarissimo; nè quello di geometria moderna *(neuere Geometrie, modern Geometry)*, che esprime del pari un concetto puramente relativo; e d'altronde la materia è in gran parte vecchia, sebbene i metodi si possano considerare come recenti. Anche il titolo di geometria di posizione *(Geometrie der Lage)* nel senso di STAUDT [1] non mi parve

[1] Equivalente a quello di *descriptiv Geometry* di CAYLEY (*Sixth memoir upon quantics* nelle Transazioni filosofiche della Società reale di Londra, 1859, p. 90). *Géométrie de position* nel senso di CARNOT corrisponde ad un concetto affatto diverso da quello ch'io dovevo esprimere in testa al mio libro. Non fo menzione d'altri nomi, come *Géométrie segmentaire* e *organische Geometrie*, i quali si riferiscono a nozioni troppo particolari, almeno secondo il mio modo di

meglio conveniente, per ciò che esso esclude la considerazione delle proprietà metriche delle figure. Ho invece preferito quello di geometria projettiva ([1]), col quale vocabolo si enuncia la vera natura de' metodi, che essenzialmente si fondano sulla projezione centrale o prospettiva; tanto più che il sommo PONCELET, il quale de' metodi moderni può dirsi il principal creatore, intitolò il suo libro immortale *Traité des propriétés projectives des figures* (1822).

La nomenclatura usata nel testo è la medesima che accettai da molti anni così nelle mie lezioni pubbliche, come in qualche scritto dato alle stampe. Essa non è propria esclusivamente di una sola e determinata scuola; pigliando un vocabolo da STEINER ed un altro da PONCELET o da CHASLES, cercai di preferire quelli che mi parvero meglio corrispondenti ai concetti e più facili a trasportarsi nella nostra lingua: del resto ho rigorosamente rispettato tutte quelle denominazioni che già sono entrate nell'uso generale degli scrittori ([2]).

Nello svolgimento della materia non mi sono attenuto esclusivamente a questo o a quell'autore; ma da tutti ho

vedere. Al contrario la denominazione di *geometria derivata* del BELLAVITIS abbraccia un campo assai più vasto di quello che io ho preso a considerare.

([1]) Cfr. KLEIN, *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie* (Nachrichten di Gottinga, 30 agosto 1871).

([2]) Per es. seguo STEINER nell'uso delle voci projettivo e prospettivo; prendo l'omologia da PONCELET; la punteggiata e la stella da BELLAVITIS, però quest'ultima in un significato diverso, cioè come equivalente al *Strahlenbündel*, non già al *Strahlenbüschel* dei tedeschi; preferisco il rapporto anarmonico di CHASLES al doppio-rapporto di MÖBIUS e STEINER; ecc. Adopero l'espressione forma geometrica per designare una serie d'elementi della stessa natura (punti, rette o piani), come l'*Elementargebilde* di STAUDT; forme geometriche fondamentali sono le *Grundgebilde* di STEINER, che si distinguono in tre specie o gradi (*Stufen*). CHASLES chiama doppi gli elementi che coincidono coi loro corrispondenti, così nell'involuzione, come nelle forme projettive sovrapposte (*divisions homographiques sur une même droite*) in generale; invece io amo meglio seguire l'esempio di coloro che mettono qui una distinzione: e ritenuta la voce doppi pel primo caso, dico uniti nel secondo. Ho usato la denominazione di figure correlative nel senso di CHASLES, non già in quello di CARNOT.

tolto quanto mi parve acconcio al mio scopo, ch'era di fare un libro assolutamente elementare e tecnico, accessibile anche a coloro i quali altra conoscenza non posseggono che delle primissime cose della geometria ordinaria. Avrei potuto, imitando STAUDT, fare a dirittura astrazione da qualsiasi corredo di nozioni preparatorie; ma in tal caso il mio lavoro si sarebbe allungato di troppo, e non avrei più potuto adattarlo agli scolari degli istituti tecnici, i quali debbono aver già nel primo biennio studiato i soliti elementi di matematica. Però non tutta la geometria tradizionale è necessaria a intendere il mio libro; basteranno le poche proposizioni fondamentali sul cerchio e sui triangoli simili.

Il libro, ho detto, doveva avere un carattere tecnico, doveva cioè condurre prontamente gli scolari ad applicare le cognizioni teoriche al disegno. Perciò diedi maggior rilievo alle proprietà grafiche che non alle metriche; mi attenni ai procedimenti della *Geometrie der Lage* di STAUDT, più spesso che a quelli della *Géométrie supérieure* di CHASLES (1); senza per altro volere del tutto escluse le relazioni metriche, il che avrebbe nociuto ad altri fini pratici dell'insegnamento (2). Introdussi adunque l'importante nozione del rapporto anarmonico e, per mezzo di essa e delle poche proposizioni di geometria ordinaria sopra menzionate, mi fu ben facile stabilire le più utili proprietà metriche, che o appartengono alle projettive o con esse vanno intimamente collegate.

Mi sono giovato della projezione centrale per determinare il concetto degli elementi a distanza infinita; e, dietro l'esempio di STEINER e di STAUDT, ho posto la legge di dualità a dirittura sul cominciar del libro, come

(1) Cfr. REYE, *Geometrie der Lage* (Hannover 1866), p. XI della prefazione.

(2) Cfr. ZECH, *Die höhere Geometrie in ihrer Anwendung auf Kegelschnitte und Flächen zweiter Ordnung* (Stuttgart 1857), prefazione.

un fatto logico che scaturisce immediato e spontaneo dalla possibilità di costruire lo spazio (a tre dimensioni) coll'elemento-punto o coll' elemento-piano. Gli enunciati e le dimostrazioni che si corrispondono in virtù di quella legge si trovano bene spesso collocati in doppia colonna; ma qualche volta ho tralasciato questa disposizione, per dare occasione agli scolari di esercitarsi a dedurre da un teorema il correlativo di quello. Non vi è nulla in geometria, giustamente osserva il prof. REYE nella prefazione al suo libro, che così accenda i principianti e li stimoli a fare da sè, come il principio di dualità; quindi importa sommamente di darne loro la cognizione quanto più presto è possibile, e di abituarli ad usarne con sicurezza.

L'ordine delle materie da me seguito è uno de' molti possibili a escogitarsi da chi voglia esporle in un corso di lezioni; io confido però d'esser pervenuto a fare un libro che possa servire anche a chi ami tenere altro ordine dal mio. Darò qualche esempio. Fin dal principio io alterno senza distinzione i teoremi della geometria piana con quelli della solida, giacchè l'esperienza m'ha insegnato, e altri (¹) lo aveva già osservato, che le considerazioni stereometriche suggeriscono bene spesso il modo di rendere facile ed intuitivo ciò che in geometria piana sarebbe complicato e di malagevole dimostrazione: di più, esse acuiscono l'intelletto e ajutano lo svolgimento di quella imaginativa geometrica che è qualità essenziale all'ingegnere, perchè ei possa pensare le figure nello spazio anche senza il sussidio di un disegno o di un modello. Ma il maestro potrebbe credere opportuno di attenersi strettamente, almeno sul principio, alla geometria piana; e in tal caso egli potrà senza danno saltar oltre parecchi numeri (²) del libro ed esporli più tardi. —

(¹) BELLAVITIS, *Saggio di Geometria derivata*, p. 247. — CHASLES, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, etc.* (Bruxelles 1839), p. 191.

(²) Nⁱ 19, 20, 28, 29, 31, 32, 41, 42,...

Io definisco le coniche come projezioni del cerchio, e dopo aver dimostrato per questa curva due teoremi fondamentali [1], li trasporto alle coniche e quindi svolgo per esse tutta la teoria de' poligoni inscritti e circoscritti e quella de'poli e delle polari, senza più curarmi del caso speciale del cerchio. Ma si potrebbe invece da quelle due proposizioni fondamentali dedurre i teoremi di PASCAL, di BRIANCHON e di DESARGUES pel cerchio, non che la teoria dei poli; e poscia, mediante la projezione od omologia, applicare tutto ciò alle coniche.

Ma su questo punto è inutile spendere altre parole. Ciascun docente, tosto che abbia fatta propria la materia, vedrà da sè come gli convenga distribuirla; ed anzi avverrà che d'anno in anno vada rimutando il modo di coordinazione, secondo i risultati della propria esperienza.

Non tutti i numeri del mio libro sono ugualmente importanti o necessari in un corso di lezioni. Il maestro sagace s'accorgerà facilmente che poche sono le proposizioni fondamentali, le sole il cui enunciato debba essere ritenuto a memoria; tutto il resto consta di corollari, casi particolari ed esercizi. Fra questi v'ha dunque una grande libertà di scelta; alcuni potranno essere trattati nella scuola, altri nei còmpiti domestici; bisognerà, e questo è ciò che sommamente importa, che ogni giorno gli scolari facciano deduzioni e soluzioni da sè; non si costringano alla sola parte passiva dello ascoltare e ripetere le cose dette dal maestro, ma si facciano concorrere attivamente allo svolgimento di cose nuove; in questo modo e non altrimenti si riuscirà ad accendere in essi l'amore allo studio ed a renderli padroni dei fecondissimi metodi della geometria projettiva. Si badi infine che ai ragionamenti teorici per la dimostrazione dei teoremi e la deduzione dei corollari vada sempre compagna l'esecuzione grafica del risolvere i

[1] N[i] 108, 110.

problemi; potendosi qui ripetere ciò che MONGE raccomandava per la geometria descrittiva ([1]).

I trattati magistrali di PONCELET, di STEINER, di CHASLES e di STAUDT ([2]) sono quelli ai quali maggiormente debbo professarmi debitore, sia perchè in essi fanno i loro primi studi tutti coloro che si dànno alla geometria, sia perchè da essi ho preso, oltre alla sostanza de' metodi, le dimostrazioni di molti teoremi e le soluzioni de' problemi. Ma insieme con quelli ebbi a consultare anche le opere di APOLLONIO, di PAPPO, di DESARGUES, di DELAHIRE, di NEWTON, di MACLAURIN, di LAMBERT, di CARNOT, di BRIANCHON, di MÖBIUS, di BELLAVITIS,... e le più recenti di ZECH, di GASKIN, di WITZSCHEL, di TOWNSEND, di REYE, di POUDRA, di FIEDLER,...

Per non accrescermi le difficoltà già abbastanza gravi dell'impresa a cui ho posto mano, mi sono astenuto dallo impormi l'obbligo di continue citazioni dalle quali apparissero o tutte le fonti cui attinsi, o tutti i primi e veri autori delle singole proposizioni o teorie. Mi si perdoni adunque, se talvolta la fonte citata non è la primitiva ([3]) o se tal' altra la citazione manca affatto. Le mie citazioni sono scarse; e per mezzo di esse ho avuto precipuamente

([1]) ..... Il est nécessaire, pour le cours de géométrie descriptive, que la pratique et l'éxécution soient jointes à l'audition des méthodes. Ainsi, les élèves doivent s'exercer aux constructions graphiques..... (*Programme de la géométrie descriptive*).

([2]) PONCELET, *Traité des propriétés projectives des figures* (Paris 1822). — STEINER, *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, etc.* (Berlin 1832). — CHASLES, *Traité de géométrie supérieure* (Paris 1852); *Traité des sections coniques* (Paris 1865). — STAUDT, *Geometrie der Lage* (Nürnberg 1847). Tralascio di menzionare altri scritti di questi grandi maestri, così come le opere del celebre PLÜCKER e di altri geometri (SEYDEWITZ, GÖPEL, WEISSENBORN, JONQUIÈRES, HESSE, PAULUS, SCHRÖTER, GEISER,...), perchè non ebbi a servirmene nella composizione di questo libro.

([3]) Per gli autori ricordati cito quasi sempre i trattati estesi e generalmente conosciuti, sebbene le loro scoperte siano state la prima volta annunziate altrove. Per es. i lavori di CHASLES sulla teoria delle coniche sono in gran parte anteriori al 1830; quelli di STAUDT cominciarono nel 1831; ecc.

la mira di far conoscere ai giovani i nomi de'grandi geometri e i titoli delle loro opere, divenute classiche. Il collegare agli enunciati di certi teoremi capitali i nomi illustri di EUCLIDE, di APOLLONIO, di PAPPO, di DESARGUES, di PASCAL, di NEWTON, di CARNOT, ... non sarà senza profitto per ajutare la mente a ritenere le cose e per eccitare quella curiosità scientifica che è sprone ad allargare la propria cultura (1).

Le citazioni da me fatte hanno anche un altro intento, cioè di acquietare le paure di coloro ai quali il solo nome di geometria projettiva mette i brividi addosso, come se si trattasse di novità escogitate da cervelli balzani. A costoro vorrei far toccare con mano che sono cose in gran parte venerande per antichità, tutte maturate nelle menti dei più insigni pensatori e ridotte ormai a quella forma di estrema semplicità che GERGONNE considerava come segno di perfezione per una teoria scientifica (2). Nella mia dimostrazione procederò secondo l'ordine delle materie tenute nel libro.

Il concetto degli elementi a distanza infinita è dovuto al celebre DESARGUES, il quale, or fanno più di due secoli, considerava esplicitamente le rette parallele come concorrenti in un punto a distanza infinita (3), ed i piani paralleli come passanti per una stessa retta all'infinito (4). Lo stesso concetto fu rimesso in piena luce e divulgato da PONCELET,

(1) Ho citato molte volte gli *Elementi di Matematica* del BALTZER, non già come fonte originale, ma per invogliare i giovani allo studio di quell'eccellente trattato, che sarebbe per essi la miglior guida attraverso i quattro anni dell'Istituto tecnico.

(2) ... On ne peut se flatter d'avoir le dernier mot d'une théorie, tant qu'on ne peut pas l'expliquer en peu de paroles à un passant dans la rue (Vedi in CHASLES, *Aperçu historique*, p. 115).

(3) *Oeuvres de* DESARGUES *réunies et analysées par* M. POUDRA (Paris 1864), t. I: *Brouillon-project d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone avec un plan* (1639), p. 104-5 e 205.

(4) *L. c.*, p. 105-6.

che pervenne alla conclusione (come conseguenza de' postulati della geometria euclidea) i punti dello spazio situati a distanza infinita doversi considerare come tutti giacenti in uno stesso piano ([1]).

Desargues ([2]) e Newton ([3]) riguardarono gli assintoti dell'iperbole come tangenti, i cui punti di contatto sono a distanza infinita.

L'omologia delle figure piane, eccettuato il nome che le fu dato da Poncelet, si trova in parecchi trattati anteriori di prospettiva, per es. in Lambert ([4]), anzi può ben dirsi in Desargues ([5]), che enunciò e dimostrò il teorema sui triangoli e sui quadrilateri prospettivi od omologici. Del resto il teorema sui triangoli (N° 13) coincide sostanzialmente con un celebre porisma di Euclide (N° 88), riferito da Pappo ([6]). L'omologia delle figure a tre dimensioni fu studiata per la prima volta da Poncelet ([7]).

La legge di dualità, come principio assoluto, fu enunciata da Gergonne ([8]); e come conseguenza della teoria delle polari reciproche (principio di reciprocità polare) fu dovuta a Poncelet ([9]).

Le forme geometriche (punteggiate e fasci), dai vocaboli in fuori, si trovano già in Desargues, e ne' geometri posteriori; nel modo più esplicito sono state definite da Steiner ([10]).

Carnot ([11]) considerò il quadrilatero completo, Stei-

([1]) *Traité des propriétés projectives des figures* (Paris 1822), Ni 96 e 580.

([2]) *L. c.*, p. 210.

([3]) *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1686), lib. I, prop. 27, scol.

([4]) *Freie Perspective*, 2ª ed. (Zürich 1774).

([5]) *L. c.*, p. 413 e 416.

([6]) Chasles, *Les trois livres de porismes d'Euclide, rétablis pour la première fois d'après la notice et les lemmes de Pappus, etc.* (Paris 1860), p. 102.

([7]) *L. c.*, p. 369 e seg.

([8]) *Annales de Mathématiques*, t. 16 (Montpellier 1826). p. 209.

([9]) *Annales de Mathématiques*, t. 8 (Montpellier 1818), p. 201.

([10]) *Systematische Entwickelung*, p. XIII-XVI.

([11]) *De la corrélation des figures de géométrie* (Paris 1801), p. 122.

NER ([1]) ne estese il concetto a tutti i poligoni ed alle figure nello spazio.

La divisione armonica era nota ai geometri della più remota antichità; e se ne trovano le proprietà fondamentali per es. in APOLLONIO ([2]). DELAHIRE ([3]) diede la costruzione del quarto elemento di un gruppo armonico mediante la proprietà del quadrilatero, vale a dire, coll'uso della sola riga.

STEINER insegnò sino dal 1832 le costruzioni delle forme projettive ([4]).

A MÖBIUS ([5]) è dovuta la teoria completa dei rapporti anarmonici; ma già EUCLIDE, PAPPO ([6]), DESARGUES ([7]), BRIANCHON ([8]) avevano dimostrata la proposizione fondamentale del N° 53, *b*).

Della teoria dell'involuzione è autore DESARGUES ([9]), sebbene anche qui non pochi casi particolari fossero già noti ai geometri greci ([10]).

La generazione delle coniche per mezzo di due forme projettive è stata esposta da STEINER e da CHASLES, quarant'anni fa; ed è costituita da due teoremi fondamentali (N[i] 113, 114) dai quali scaturisce tutta quanta la dottrina di quelle importantissime curve. La medesima generazione comprende la descrizione organica di NEWTON ([11]) e diversi teoremi di MACLAURIN.

PASCAL a sedici anni (1640) trovò il famoso teorema dell'esagrammo mistico ([12]), e BRIANCHON dedusse da esso

([1]) *L. c.*, p. 72 e 235.
([2]) *Conicorum* lib. I, 34, 36, 37, 38.
([3]) *Sectiones conicae* (Parisiis 1685), I, 20.
([4]) *L. c.*, p. 91.
([5]) *Der barycentrische Calcul* (Leipzig 1827), cap. 5.
([6]) *Collectiones Mathematicae*, VII, 129.
([7]) *L. c.*, p. 425.
([8]) *Mémoire sur les lignes du second ordre* (Paris 1817), p. 7.
([9]) *L. c.*, p. 119, 147, 171, 176.
([10]) PAPPO, *Collectiones Mathematicae*, VII, 37-56, 127, 128, 130-133.
([11]) *L. c.*, lib. I, lemma 21.
([12]) *Lettera di* LEIBNITZ *à M. Périer* nelle *Oeuvres de* B. PASCAL (ed. BOSSUT), t. 5, p. 459,

nel 1806, mediante la teoria dei poli, la proposizione correlativa sull'esagono circoscritto (N° 117).

Le proprietà del quadrilatero formato da quattro tangenti e del quadrangolo dei punti di contatto si leggono nell'appendice latina *(De linearum geometricarum proprietatibus tractatus)* all' edizione inglese (Londini 1748) dell' algebra postuma di MACLAURIN, il quale ne aveva dedotto la costruzione di una conica per punti o per tangenti, in parecchi dei casi in cui siano dati cinque elementi (punti o tangenti). Tutti i casi possibili furono poi risoluti da BRIANCHON *(l. c.)*

L'idea di considerare due serie projettive di punti in una stessa conica è esplicitamente dichiarata nel *Saggio* di BELLAVITIS (p. 270, nota).

A CARNOT (1) è dovuto un celebre teorema (N° 246) sui segmenti che una conica determina sui lati di un triangolo. Anche di questo teorema certi casi particolari erano già conosciuti molto tempo innanzi (2).

Eleganti costruzioni per le quali la sola riga basta a risolvere alcuni problemi di 1° e 2° grado, presupposto però che siano dati certi elementi, s'incontrano nella *Freie Perspective* di LAMBERT; ma la possibilità di risolvere tutti i problemi di 2° grado colla riga e con un cerchio fisso venne messa in piena luce da PONCELET; e poi comprovata coll'esecuzione di fatto da STEINER in un aureo suo libretto (N° 184).

Con diverse denominazioni la teoria dei poli e delle polari era già contenuta nelle opere citate di DESARGUES (3) e di DELAHIRE (4). In seguito, la perfezionarono MONGE (5), BRIANCHON (6) e PONCELET, il quale ultimo ne trasse fuori

(1) *Géométrie de position* (Paris 1803), N° 379.

(2) APOLLONIO, *Conicorum* lib. III, 16-23. — DESARGUES, *l. c.*, p. 202. — DELAHIRE, *l. c.*, V, 10, 12. — NEWTON, *Enumeratio linearum tertii ordinis* (Londini 1706), p. 4.

(3) *L. c.*, p. 164, 186, 190 e seg.

(4) *L. c.*, I, 21-28; II, 23-30.

(5) *Géométrie descriptive* (Paris 1795), N° 40.

(6) *Journal de l'École polytechnique*, cahier 13 (Paris 1806).

la teoria delle figure polari reciproche, che in sostanza è la legge di dualità, da lui chiamata principio di reciprocità polare.

Finalmente le più insigni proprietà dei diametri conjugati furono esposte da APOLLONIO nei libri 2° e 7° del suo trattato delle coniche.

Del resto, chi vorrà procacciarsi più estesa e precisa conoscenza dei progressi della geometria dalle prime origini sino al 1830 (il che basta per le materie contenute in questo libro), non ha che a leggere il classico *Aperçu historique* del sig. CHASLES.

A questo volume va unito un atlante di 44 tavole, contenenti 212 figure, i cui numeri però vanno solamente da 1 a 199. Spero che le figure, per numero e qualità, saranno bastevoli a rendere il libro intelligibile anche pei più inesperti principianti. Le figure furono per la maggior parte disegnate dal sig. ingegnere CARLO SAVIOTTI, assistente alla mia scuola nel R. Istituto tecnico superiore; le rimanenti dal sig. GUIDO PERELLI, studente licenziato dall' Istituto tecnico di Milano. All'uno e all'altro io rendo qui pubblica testimonianza di gratitudine. E ringrazio anche la casa editrice, che usò ogni diligenza affinchè la stampa riuscisse nitida e corretta.

Milano, 5 novembre 1872.

L' AUTORE.

PROGRAMMA DI GEOMETRIA

per l'anno 3° degli Istituti tecnici.

Projezione centrale: N[i] 1-20.
Forme geometriche fondamentali: 21-26.
Proprietà armonica del quadrilatero e costruzioni che ne conseguono: 38-52.
Projettività delle rette punteggiate e dei fasci di rette: 33-37, 60-65, 73-83.
Costruzione di una forma projettiva ad una data: 66-72.
Rapporti anarmonici: 53-59.
Fasci projettivi nel circolo; tangenti punteggiate projettive: 107-112.
Teoremi sui poligoni inscritti o circoscritti (teoremi di PASCAL, di BRIANCHON) e loro conseguenze: 117, 127, 129, 131-133, 135, 137, 139, 141.
Serie projettive di punti in una circonferenza o in una conica: 157, 160.
Costruzione degli elementi uniti di due forme projettive sovrapposte: 162.
Metodo di falsa posizione per la risoluzione grafica dei problemi di 2° grado; applicazioni: 166, 168, 169, 172-175, 181-185.
Involuzione di punti in linea retta: 92-106, 163, 164.
Involuzione di punti in una circonferenza o in una conica: 159, 161, 165.
Poli e polari; costruzioni che ne dipendono: 186-195, 204, 205, 219, 220, 222-224.
Inscrizione di poligoni, i cui lati debbano passare per punti dati: 172-175, 185.
Teorema sul quadrilatero segato da una trasversale: 101-103.
Figure polari reciproche: 230-235.
Legge di dualità: 27-32, 234, 235.
Le coniche, projezioni centrali del cerchio: 18, *f*).
Le coniche generate mediante due forme projettive: 113-115.

NB. Il 2° volume di quest'operetta conterrà le proprietà focali delle coniche, la teoria dei coni e delle figure sferiche, ed i principî di geometria analitica, secondo il programma del 4° anno.

ELEMENTI DI GEOMETRIA PROJETTIVA

§ 1. Definizioni.

1. Dirò *figura* un complesso qualsivoglia di punti, di rette e di piani; le quali rette e i quali piani si concepiscano estesi all'infinito, senza alcun riguardo alle porzioni finite di spazio da essi circoscritte. Per esempio, col nome di *triangolo* s'intenderà il sistema di tre punti e delle tre rette che li congiungono a due a due; col nome di *tetraedro* il sistema di quattro piani e de' quattro punti in cui si segano a tre a tre, ecc.

Per uniformità di notazione, designerò costantemente i punti con lettere italiche majuscole A, B, C..., le rette colle minuscole a, b, c..., i piani con lettere greche α, β, γ,.... Oltre a ciò, con AB si rappresenterà la retta determinata dai due punti A, B; con Aa il piano che passa pel punto A e per la retta a; con $a\alpha$ il punto comune alla retta a ed al piano α; con $\alpha\beta$ la retta determinata dai piani α, β; con ABC il piano dei tre punti A, B, C; con $\alpha\beta\gamma$ il punto comune ai tre piani α, β, γ; con $\alpha . BC$ il punto comune al piano α ed alla retta BC; con $A . \beta\gamma$ il piano passante pel punto A e per la retta $\beta\gamma$; con $\alpha . Bc$ la retta comune al piano α ed al piano Bc; con $A . \beta c$ la retta che congiunge il punto A col punto βc, ecc. Scrivendo $\alpha . BC \equiv A'$ si vorrà significare che il punto comune al piano α ed alla retta BC è A'; la scrittura $u \equiv ABC$ ... indicherà che la retta u contiene i punti A, B, C ..., ecc.

2. *Projettare* da un punto fisso O (*centro di projezione*) una figura [$ABCD$...., $abcd$....] composta di punti e di rette significa costruire le rette o *raggi projettanti* OA, OB, OC, OD,... e i piani (*piani projettanti*) Oa, Ob, Oc.... Si ottiene così una nuova figura composta di rette e di piani passanti pel centro O.

3. *Segare* con un piano fisso σ (*piano trasversale*) una figura [$\alpha\beta\gamma\delta$..., $abcd$...] composta di piani e di rette significa

costruire le rette o tracce $\sigma\alpha$, $\sigma\beta$, $\sigma\gamma$..., ed i punti o tracce σa, σb, σc.... Ne risulta per tal modo una nuova figura composta di rette e di punti giacenti nel piano σ.

4. Projettare da una retta fissa s (asse) una figura $ABCD$... composta di punti significa costruire i piani sA, sB, sC.... La nuova figura che ne risulta è dunque composta di piani tutti passanti per l'asse s.

5. Segare con una retta fissa s (trasversale) una figura $\alpha\beta\gamma\delta$... composta di piani significa costruire i punti $s\alpha$, $s\beta$, $s\gamma$.... La nuova figura è dunque costituita da punti allineati sulla trasversale fissa s.

6. Se una figura è composta di rette abc.... passanti per un punto fisso o centro O, si può projettarla da una retta od asse s che passi per O; ne risulta una figura composta de' piani sa, sb, sc....

7. Se una figura è composta di rette abc... tutte situate in un piano fisso, si può segarla con una retta (trasversale) s giacente nel medesimo piano; la figura che ne risulta è costituita dai punti sa, sb, sc... (1).

§ 2. Projezione centrale.

8. Projettare da un punto (centro di projezione) O sopra un piano (quadro) σ' una data figura ABC... abc... composta di punti e di rette, significa projettare (N° 2) la figura da O e quindi segare (N° 3) col piano σ' il complesso delle rette e dei piani projettanti; vale a dire, costruire i raggi OA, OB, OC,... e i piani Oa, Ob, Oc,.... e quindi i punti $\sigma'.\,OA \equiv A'$, $\sigma'.\,OB \equiv B'$, $\sigma'.\,OC \equiv C'$... e le rette $\sigma'.\,Oa \equiv a'$, $\sigma'.\,Ob \equiv b'$, $\sigma'.\,Oc \equiv c'$.... La nuova figura costituita da questi punti e da queste rette, che tutte giacciono nel piano σ', si denomina imagine prospettiva o projezione della figura data, dal centro O sul quadro σ'.

9. Se anche la figura data è piana (fig. 1ª), cioè se i punti

(1) Projettare e segare: queste sono le due operazioni fondamentali della geometria projettiva.

ABC... e le rette *abc*... giacciono in un solo e medesimo piano σ (in generale non parallelo a σ'), è evidente che viceversa la figura data σ è la projezione o imagine prospettiva della nuova figura σ' dal centro O sul quadro σ. Perciò le due figure piane σ e σ' si dicono prospettive [1]. Diconsi poi corrispondenti i punti A ed A', B e B', C e C'...., e le rette a ed a', b e b', c e c',....; in generale sono corrispondenti una parte della figura σ ed una parte di σ', quando l'una è la projezione o imagine dell'altra, cioè quando l'una è l'insieme dei punti e delle rette corrispondenti ai punti e alle rette dell'altra.

Due punti corrispondenti, come A ed A', giacciono in un raggio (projettante) che passa per O; e così pure due rette corrispondenti, come a ed a', sono in un piano (projettante) che passa per O; donde segue che due rette corrispondenti si segano in un punto della retta comune ai due piani σ, σ'. Se, nel piano σ, il punto A giace nella retta a, anche nel piano σ' il punto A' corrispondente ad A giacerà nella retta a' corrispondente ad a; e viceversa.

10. Consideriamo due rette a, a' corrispondenti (fig. 2ª); ogni raggio condotto per O nel loro piano incontra a ed a' in due punti corrispondenti, come A, A'. Se il raggio si muove ruotando intorno ad O, variano simultaneamente i punti A ed A'; se il raggio s'accosta ad essere parallelo ad a, il punto A' s'avvicina ad I' (punto comune ad a' ed alla retta passante per O e parallela ad a), ma il punto A si allontana sempre più. Affinchè sussista senza eccezione la proprietà che ad ogni punto di a' corrisponda un punto di a, noi diremo che la retta a ha un punto I all'infinito, nel quale viene a cadere A quando A' cade in I', cioè quando il raggio mobile intorno ad O diviene parallelo ad a. La retta a ha un solo punto all'infinito, perchè per O passa un solo raggio parallelo ad a.

Il punto I', imagine del punto all'infinito I, dicesi punto di fuga o punto-limite.

[1] In generale diconsi prospettive due figure, se ai punti A, B, C,... dell'una corrispondano, secondo una legge, i punti A', B', C',... dell'altra, e inoltre le due figure si trovino in tale posizione che le rette AA', BB', CC',..., congiungenti i punti corrispondenti, concorrano in un punto fisso. Per esempio sono figure prospettive le sezioni fatte in un cono da due piani, o da un piano e da una sfera passante pel vertice, ecc. (Vedi anche Baltzer, *Stereometria*, p. 74).

Analogamente la retta a' ha un punto J' all'infinito, che è il corrispondente del punto J ove a è segata dal raggio parallelo ad a'.

Due rette parallele hanno lo stesso punto all'infinito. Tutte le rette parallele ad una medesima sono da considerarsi come aventi un punto comune (all'infinito).

Due rette situate in uno stesso piano hanno sempre un punto comune (a distanza finita o all'infinito).

11. Se ora la retta a assume tutte le posizioni possibili nel piano σ, la corrispondente retta a' risulterà sempre determinata come intersezione dei piani σ e Oa. Variando a, il raggio OI genera un piano π parallelo a σ, e il punto I' descriverà la retta $\pi\sigma'$, che diremo i'. Questa retta i' è dunque tale, che ad un suo punto qualunque corrisponde un punto all'infinito nel piano σ, comune anche al piano π. La linea luogo di questi punti all'infinito si ammetterà essere una retta i, perchè essa dee corrispondere alla retta i' del piano σ', e dee costituire l'intersezione dei piani π, σ; e per tal modo sussisterà senza eccezione la legge che ad ogni retta di σ' corrisponda una retta di σ.

Il piano σ ha una sola retta all'infinito, perchè per O passa un solo piano parallelo a σ.

La retta i', imagine della retta all'infinito i, dicesi retta di fuga o retta-limite.

Analogamente, il piano σ' ha una retta all'infinito, che è la corrispondente di quella in cui σ è segato dal piano π' condotto per O parallelamente a σ'.

Due piani paralleli hanno la stessa retta all'infinito. Tutt'i piani paralleli ad un medesimo piano sono da considerarsi come passanti per una retta fissa (all'infinito).

Se una retta è parallela ad un piano, la retta all'infinito del piano passa pel punto all'infinito della retta. Se due rette sono parallele, esse incontrano in uno stesso punto la retta all'infinito del piano determinato da quelle due rette.

Due piani s'incontrano sempre secondo una retta (a distanza finita o all'infinito).

Una retta ed un piano (che non passi per la retta) s'incontrano sempre in un punto (a distanza finita o all'infinito).

Tre piani, che non passino per una medesima retta, hanno sempre un punto comune (a distanza finita o all'infinito).

12. Teorema. — Se due triangoli sono prospettivi [1], le intersezioni dei lati corrispondenti sono in linea retta.

a) In primo luogo, i triangoli ABC, $A'B'C'$ giacciano in due piani differenti σ, σ', e sia O il punto di concorso delle congiungenti AA', BB', CC' (fig. 1ª). Allora i due triangoli sono le sezioni fatte dai piani σ, σ' in uno stesso triedro di vertice O, le cui facce contengono le coppie di lati BC e $B'C'$, CA e $C'A'$, AB ed $A'B'$. Per conseguenza i due lati di ciascuna coppia s'incontrano, e i tre punti d'incontro, dovendo giacere in ambedue i piani σ, σ', sono situati nella retta $\sigma\sigma'$.

b) In secondo luogo, giacciano i due triangoli dati $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ in uno stesso piano σ (fig. 3ª). Dal punto O, comune alle congiungenti A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, e fuori del piano σ, conducasi una retta ad arbitrio, e in questa assumansi i punti S_1, S_2. Da S_1 projettisi il triangolo $A_1B_1C_1$, e da S_2 il triangolo $A_2B_2C_2$. Siano A, B, C i punti in cui le rette S_1A_1, S_1B_1, S_1C_1 segano ordinatamente le S_2A_2, S_2B_2. S_2C_2; il triangolo ABC sarà prospettivo sì ad $A_1B_1C_1$, sì ad $A_2B_2C_2$. Le rette BC, B_1C_1, B_2C_2 a due a due si segano, epperò concorrono in uno stesso punto A_0 [2]; così CA, C_1A_1, C_2A_2 concorrono in un punto B_0; e AB, A_1B_1, A_2B_2 concorrono in un punto C_0. I tre punti A_0, B_0, C_0 sono situati nella retta comune al piano σ ed al piano ABC. Il teorema è così dimostrato.

13. Teorema. — Se due triangoli $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ hanno la proprietà che i lati B_1C_1 e B_2C_2, C_1A_1 e C_2A_2, A_1B_1 ed A_2B_2 si seghino in tre punti A_0, B_0, C_0 di una stessa retta, i due triangoli sono prospettivi.

Dimostrazione. — Se i due triangoli dati giacciono in piani differenti, i piani determinati dalle suddette coppie di lati sono le facce di un triedro, i cui spigoli A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 concorrono nel vertice O.

Se i due triangoli sono in uno stesso piano σ, conducasi (fig. 3ª) un altro piano per la retta $A_0B_0C_0$, e su di esso si projetti il

[1] Vedi la nota al N° 9.

[2] La BC è l'intersezione dei piani $S_1B_1C_1$, $S_2B_2C_2$ che sono distinti fra loro; vale a dire, le rette BC, B_1C_1, B_2C_2 non sono tutte e tre in uno stesso piano. Il punto in cui la BC incontra il piano delle B_1C_1, B_2C_2 sarà per conseguenza comune a tutte e tre queste rette.

triangolo $A_1B_1C_1$ da un centro arbitrario S_1. Se la projezione è ABC, le rette BC, B_1C_1 avranno in comune il punto A_0 pel quale passa anche B_2C_2; e così CA passerà per B_0, AB per C_0. Le rette AA_2, BB_2, CC_2 a due a due si segano, senza però essere tutte e tre in uno stesso piano, laonde concorrono in un punto S_2. Le rette S_1S_2, A_1A_2 sono in un piano, perchè S_1A_1, S_2A_2 si segano in A; dunque S_1S_2 sega A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, vale a dire A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 concorrono nel punto O comune al piano σ ed alla retta S_1S_2 (¹).

14. La dimostrazione del teorema N° 12, pel caso che i due triangoli siano in piani differenti, sussiste per due figure piane prospettive σ, σ' qualsivogliano; come del resto abbiamo già veduto al N° 9. Ossia:

Se due figure piane ABC..., $A'B'C'$ ... situate in piani differenti sono prospettive, vale a dire, se i raggi AA', BB', CC' ... concorrono in un punto O, le rette corrispondenti AB ed $A'B'$, AC ed $A'C'$ ..., BC e $B'C'$, ..., si segano in punti di una linea retta, che è l'intersezione dei piani σ, σ'.

Dim. — Se M è un punto di questa retta, e se una retta a di σ passa per M, anche la corrispondente retta a' passerà per M: infatti le due rette a, a' sono le intersezioni di uno stesso piano (projettante) coi piani σ, σ', epperò devono concorrere nel punto comune ai tre piani.

La retta $\sigma\sigma'$ è il luogo dei punti che corrispondono a sè medesimi.

Alla retta $\sigma\sigma'$ è parallela la retta-limite i' del piano σ', giacchè i' e la retta corrispondente, che è tutta all'infinito in σ, debbono segarsi su $\sigma\sigma'$. Analogamente è parallela alla retta $\sigma\sigma'$ la retta-limite j del piano σ.

15. Viceversa, se ai punti $A, B, C, ...$ ed alle rette $AB, AC, ...$ $BC, ...$ di una figura piana σ corrispondono ordinatamente i punti $A', B', C', ...$ e le rette $A'B'$, $A'C'$, ..., $B'C'$, ... di un'altra figura piana σ' (²), in modo che le rette corrispondenti AB ed $A'B'$, AC ed $A'C'$, ..., BC e $B'C'$,... si seghino in punti di una retta fissa (la retta $\sigma\sigma'$), le due figure sono prospettive.

Infatti: sia O il punto comune ai tre piani $AB.A'B'$, $AC.A'C'$,

(¹) Baltzer, *Stereom.*, p. 74–6. Il teorema dei N¹ 12 e 13 è dovuto a Desargues.

(²) I piani σ, σ' sono supposti distinti fra loro.

$BC.B'C'$; in O concorreranno i tre spigoli AA', BB', CC' del triedro formato dai piani medesimi. Così pure i tre piani $AB.A'B'$, $AD.A'D'$, $BD.B'D'$ si segheranno in un punto, che sarà comune agli spigoli AA', BB', DD'; questo punto è ancora O, giacchè a determinarlo bastano le due rette AA', BB'. Dunque le rette AA', BB', CC', DD',... passano tutte per uno stesso punto O; ossia le due figure proposte sono prospettive, ed O è il loro centro di projezione.

§ 3. Omologia.

16. Riprendasi la considerazione dei N[i] 9, 10, 11 e si imagini ora che, rimanendo invariabile e fissa la figura σ' nel proprio piano, questo si faccia girare intorno alla retta $\sigma\sigma'$ (¹) finchè esso coincida col piano σ. Allora le due figure σ, σ' verranno a trovarsi in un medesimo piano. Le coppie di rette corrispondenti, come a ed a', b e b'... si segheranno ancora sopra una retta fissa $\sigma\sigma'$, giacchè questa è rimasta immobile nella rotazione del piano σ'. Ma a qual legge saranno ora soggette le rette AA', BB', CC'... che uniscono le coppie de' punti corrispondenti delle due figure adagiate in uno stesso piano? Dico che concorreranno sempre in un punto fisso O.

Infatti, siano A ed A', B e B', C e C' tre coppie di punti corrispondenti; esse formano due triangoli ABC, $A'B'C'$, de' quali si sa che le coppie di lati BC e $B'C'$, CA e $C'A'$, AB e $A'B'$ si segano in tre punti in linea retta. Perciò (N° 13) i raggi AA', BB', CC' concorreranno in un punto O. Ma a determinare questo punto bastano i due raggi AA', BB'; dunque, in qualsiasi modo si scelga la terza coppia di punti corrispondenti C, C', sempre avverrà che il raggio CC' passi pel punto O.

Due figure così fatte σ, σ', le quali non sono altro che due figure prospettive, i cui piani vengano ribaltati l'uno sull'altro, diconsi anche omologiche (²); centro di omologia o centro di collineazione il punto O col quale sono allineate le coppie di

(¹) In questa rotazione le due figure si conservano sempre prospettive, ed il centro di projezione descrive un cerchio il cui piano è perpendicolare alla retta $\sigma\sigma'$ ed il cui centro è nella retta-limite di σ. Vedi Baltzer, *Stereom.*, p. 79.

(²) Cfr. Baltzer, *Stereom.*, p. 77. La denominazione è di Poncelet.

punti corrispondenti; **asse d'omologia**, **asse di collineazione** la retta $\sigma\sigma'$ sulla quale concorrono le coppie di rette corrispondenti. Ciascuna figura ha una retta-limite; essa è la retta che corrisponde all'infinito dell'altra figura. Le due rette-limiti sono parallele all'asse di omologia (N° 14).

17. TEOREMA. — Se ai punti A, B, C... ed alle rette AB, AC..., BC... di una figura corrispondono ordinatamente i punti A', B', C'... e le rette $A'B'$, $A'C'$..., $B'C'$..., di un'altra figura situata colla prima in uno stesso piano, e se le coppie di punti corrispondenti A ed A', B e B', C e C'... sono allineate con un punto fisso O, dico che le rette corrispondenti AB ed $A'B'$, AC ed $A'C'$... BC e $B'C'$... si segano in punti di una retta fissa.

DIM. — Siano infatti a ed a', b e b', c e c' tre coppie di rette corrispondenti; siccome, per ipotesi, le rette che congiungono i vertici corrispondenti de' triangoli abc, $a'b'c'$ concorrono in un punto O, così (N° 12) i lati corrispondenti a ed a', b e b', c e c' si segheranno in tre punti in linea retta. Ma a determinare questa retta bastano i due punti aa', bb'; epperò essa rimane la medesima se in luogo di c e c' si considerino due altre rette corrispondenti qualisivogliano. Dunque due rette corrispondenti si segano sempre sopra una retta fissa, che indicheremo con s.

Ne segue che, se ora le due figure si concepiscono situate, non in un solo e medesimo piano, ma in due piani sovrapposti, e se, tenendo fisso l'un d'essi, si fa girare l'altro intorno alla retta s, si otterranno due figure nelle precise condizioni supposte al N° 15, cioè due figure prospettive.

Richiamisi poi che le considerazioni del N° 16 costituiscono la dimostrazione del teorema che segue:

Se due figure sono in un medesimo piano, e se ai punti A, B, C... ed alle rette AB, AC,... BC,... dell'una corrispondono ordinatamente i punti A', B', C'... e le rette $A'B'$, $A'C'$,... $B'C'$,... dell'altra, in modo che due rette corrispondenti si seghino sempre sopra una retta fissa, le due figure sono prospettive, vale a dire, le congiungenti AA', BB', CC',... concorrono in un punto fisso.

18. ESERCIZIO. — Dati il centro O e l'asse s d'omologia, e dati inoltre due punti corrispondenti A, A' (allineati con O), costruire la figura omologica ad una data.

a) Assunto un altro punto B della figura data (fig. 4ª), per ottenere il suo corrispondente B', osservo che il raggio BB' deve passare per O, e che le rette corrispondenti AB, $A'B'$ devono segarsi su s; dunque B' sarà il punto comune ad OB e alla congiungente di A' colla intersezione di AB con s (¹). In ugual modo si costruiscono quante altre coppie si vogliono di punti corrispondenti. E per costruire la retta r' corrispondente ad una data r, basta trovare il punto B' corrispondente di un punto B di r, e congiungere B' col punto rs.

b) Per trovare il punto I' corrispondente al punto all'infinito I di una retta data, per es. di un raggio uscente da O, si ripeterà la costruzione suesposta pel punto B'; cioè I' sarà il punto comune al raggio dato OI ed alla retta che congiunge A' col punto d'intersezione di s colla retta AI (cioè colla retta passante per A e parallela al raggio dato OI).

c) Tutt' i punti analoghi ad I' (corrispondenti ai punti all'infinito della figura data) cadono in una retta i' parallela ad s, la quale i' è la retta-limite della seconda figura.

Se nella costruzione precedente si scambiano fra loro i punti A, A', si otterrà un punto J della retta-limite j della prima figura.

d) Invece di due punti corrispondenti A, A', potrebbero essere date (fig. 5ª) due rette corrispondenti a, a' (segantisi su s). Ogni raggio per O le segherà in due punti corrispondenti. Assunta un'altra retta b nella prima figura, per ottenere la corrispondente b', basta unire il punto bs con quello in cui a' è segata dal raggio che da O va al punto ab (²).

e) I dati del problema potrebbero essere (fig. 6ª) il centro O, l'asse s e la retta-limite j della prima figura. Allora, se una retta a della prima figura sega j in J ed s in P, la retta corrispondente a' passerà per P e sarà parallela ad OJ.

Per trovare il punto A' corrispondente ad un dato punto A, si troverà la retta a' corrispondente ad una retta a condotta ad arbitrio per A; indi si prenderà l'intersezione di a' con OA.

f) Ritenuta la precedente costruzione delle figure omologiche, siano ancora O il centro, s l'asse d'omologia, e j la retta-limite della prima figura.

Nella prima figura (fig. 7ª, 8ª e 9ª) sia dato un circolo **C**; ad esso corrisponderà nella seconda figura una curva **C**' che potremo costruire, trovando nel modo suesposto i punti e le rette che corrispondano ai punti ed alle tangenti di **C**. Due punti corrispondenti M, M' delle due curve saranno sempre in linea retta con O; e due corde corrispondenti (cioè le congiungenti MN, $M'N'$ di due coppie di punti corrispondenti) si segheranno sempre

(¹) Questa costruzione mostra che se B cade in s, il punto B' coincide con B; cioè ogni punto di s corrisponde a sè medesimo.

(²) Di qui si vede subito che se a passa per O, la retta a' coincide con a; cioè ogni retta per O corrisponde a sè medesima.

su s; e, come caso particolare ([1]), due tangenti m, m' corrispondenti (cioè le tangenti in due punti corrispondenti M, M') concorreranno del pari in un punto di s.

Di qui risulta manifesto che la curva C', al pari del circolo, ha le due proprietà: 1° che qualunque retta del suo piano o la sega in due punti, o le è tangente in un punto, o non ha con essa alcun punto comune; 2° che da un punto arbitrario del piano si possono condurre alla curva due tangenti, o una sola (se il punto è nella curva), o nessuna.

Siccome due figure omologiche si possono supporre prodotte dalla sovrapposizione di due piani prospettivi (N° 17), così la curva C' non è altro che la sezione fatta da un piano qualsivoglia in un cono obliquo a base circolare, cioè nel cono formato dalle rette che projettano i punti di un circolo da un centro preso ad arbitrio nello spazio. Perciò la curva C' si denomina sezione conica, o semplicemente conica; vale a dire, la curva omologica ad un circolo è una conica.

g) I punti della retta j corrispondono ai punti all'infinito della seconda figura. Ora il circolo C può segare j in due punti J_1, J_2, o toccare j in un punto J, o non avere con j alcun punto comune.

Nel primo caso (fig. 7ª), la curva C' avrà adunque due punti J'_1, J'_2 a distanza infinita, situati nelle direzioni delle rette OJ_1, OJ_2. Alle due rette che sono tangenti al cerchio C in J_1, J_2 corrisponderanno due rette (risp. parallele ad OJ_1, OJ_2) che sono da considerarsi come tangenti alla curva C' ne' suoi punti all'infinito J'_1, J'_2. Queste due tangenti, i cui punti di contatto sono all'infinito, diconsi assintoti della curva C', alla quale si dà il nome d'iperbole.

Nel secondo caso (fig. 8ª), la curva C' ha un solo punto J all'infinito, e in esso è da considerarsi come toccata dalla retta all'infinito j', che è la corrispondente di j, tangente al circolo in J. Questa curva C' chiamasi parabola.

Nel terzo caso (fig. 9ª), la curva C', che non ha più alcun punto all'infinito, dicesi ellisse.

h) Il centro d'omologia è un punto che corrisponde a sè stesso, ed ogni raggio passante per esso corrisponde del pari a sè medesimo. Dunque se una curva C passa per O (fig. 10ª), anche la curva corrispondente C' passerà per O, e le due curve avranno ivi la stessa tangente.

Così pure, ciascun punto dell'asse d'omologia corrisponde a sè medesimo; dunque, se una curva della prima figura tocca s in un punto, anche la curva corrispondente della seconda figura sarà tangente ad s nello stesso punto, ecc.

k) Notiamo due casi particolari:

1° L'asse s d'omologia sia tutto a distanza infinita; allora due rette corrispondenti sono sempre parallele, vale a dire, due angoli corrispondenti sono

[1] Giacchè la tangente in M è considerata come la retta che passa per M e pel punto infinitamente vicino della curva. Baltzer, *Planimetria*, p. 41.

sempre uguali. In questo caso, le due figure diconsi simili e similmente poste, od anche omotetiche; e il punto O centro di similitudine o centro d'omotetia. In due figure omotetiche, ad un circolo corrisponde sempre un circolo.

2° Invece può essere a distanza infinita il punto O; allora le rette che uniscono coppie di punti corrispondenti sono parallele ad una direzione fissa. In questo caso le figure diconsi omologiche-affini (¹), e la retta s asse d'affinità. Ad un punto all'infinito corrisponde un punto all'infinito; e la retta all'infinito corrisponde a sè medesima. Segue di qui che ad un'ellisse corrisponderà un'ellisse, ad un'iperbole un'iperbole, ad una parabola una parabola, ad un parallelogrammo un parallelogrammo.

§ 4. Figure omologiche a tre dimensioni.

19. Abbiasi ora una figura composta di punti, piani e rette, comunque situati nello spazio a tre dimensioni, e (ciò che può avvenire nella costruzione dei bassorilievi e nelle decorazioni teatrali) se ne faccia una rappresentazione prospettiva in rilievo, come segue. Assumasi un punto O dello spazio come centro di prospettiva o di omologia; un piano π (piano d'omologia), ciascun punto del quale debba essere imagine di sè stesso; ed inoltre un punto A' come imagine di un dato punto A della figura obbiettiva, in modo che la retta AA' passi per O. Allora, sia B un altro punto qualunque; per ottenerne l'imagine B', si conduca il piano OAB, e in esso si proceda come se si trattasse di costruirvi due figure omologiche, per le quali O sia il centro, la retta comune ai piani OAB, π sia l'asse, ed AA' siano due punti corrispondenti. Il punto B' sarà l'intersezione di OB colla retta condotta da A' all'intersezione del piano π colla retta AB (N° 18, a).

In tal guisa, per ciascun punto della figura data si otterrà il punto corrispondente dell'imagine; e due punti corrispondenti saranno sempre allineati col punto fisso O. Ciascun piano σ condotto per O sega le due figure solide (la proposta e l'imagine) secondo due figure omologiche, per le quali O è il centro e la retta $\sigma\pi$ è l'asse d'omologia, d'onde segue che ad ogni retta della figura data corrisponderà una retta nella imagine, e che due rette corrispondenti giacciono sempre in un piano passante per O o s'incontrano in un punto del piano π.

Dico inoltre che ad ogni piano α appartenente alla figura data e non passante per O corrisponderà nell'imagine ancora un piano. Infatti, alle rette a, b, c... del piano α corrispondono altrettante rette a', b', c'...; ed ai punti ab, ac..., bc..., i punti $a'b'$, $a'c'$..., $b'c'$... Cioè le rette a', b', c', ... sono tali che

(¹) Baltzer, *Stereom.*, p. 79.

a due a due si segano, senza però aver tutte uno stesso punto comune: dunque ([1]) esse giacciono in un medesimo piano α'.

Due piani corrispondenti α, α' si segano sul piano π; infatti tutt'i punti epperò anche tutte le rette di questo piano corrispondono a sè medesime, dunque la retta $\alpha'\pi$ coincide colla retta $\alpha\pi$.

I due piani α, α' costituiscono evidentemente due figure prospettive (come i piani σ, σ' dei N[i] 9,.. 11).

In ogni piano σ passante per O vi è una retta-limite i' che è l'imagine della retta all'infinito del piano medesimo. Le rette-limiti di due piani σ_1, σ_2 hanno un punto comune, che è imagine del punto all'infinito della retta $\sigma_1\sigma_2$. Le rette-limiti di tutt'i piani σ sono dunque tali che a due a due si segano: e siccome esse non passano tutte per uno stesso punto (giacchè i piani per σ non passano tutti per una medesima retta), così giaceranno tutte in uno stesso piano φ'. Questo piano φ', che può dirsi piano di fuga o piano-limite, è parallelo al piano π, perchè tutte le rette-limiti de' piani σ sono parallele allo stesso piano π.

Esso piano-limite φ' è dunque il luogo delle rette corrispondenti alle rette all'infinito di tutti i piani dello spazio, epperò anche il luogo dei punti all'infinito di tutte le rette dello spazio: infatti la retta all'infinito di un piano qualunque α non è altro che la retta all'infinito del piano parallelo ad α e passante per O; e così pure il punto all'infinito di una retta qualsivoglia a coincide col punto all'infinito della retta parallela ad a e passante per O.

20. I punti all'infinito di tutto lo spazio a tre dimensioni sono adunque tali che le loro imagini sono punti di un solo e medesimo piano φ (il piano di fuga). È dunque naturale di considerare tutt'i punti all'infinito dello spazio come situati in un piano φ (il piano all'infinito), che ha per sua imagine il piano-limite φ' ([2]).

Ammessa la nozione del piano all'infinito φ, il punto all'infinito di una retta qualsivoglia a non è altro che il punto $a\varphi$, e la retta all'infinito di un piano qualsivoglia α non è altro che la retta $\alpha\varphi$. Due rette sono parallele, se si incontrano in un punto del piano φ; due piani sono paralleli, se la retta ad essi comune giace nel piano φ, ecc.

§ 5. Forme geometriche.

21. Si denomini:

Retta punteggiata o semplicemente **punteggiata** una figura $A.B.C...$ costituita da punti allineati in una retta: tale è per esempio la figura che risulta dalle operazioni dei N[i] 5 e 7;

([1]) Infatti, siccome c' sega a' e b' senza passare pel punto $a'b'$, così c' ha due punti comuni col piano $a'b'$; epperò c' giace nel piano $a'b'$, ecc.

([2]) Baltzer, *Stereom.*, p. 81.

Fascio di piani una figura $\alpha.\beta.\gamma...$ costituita da piani tutti passanti per una medesima retta (asse del fascio); tale è la figura che risulta dalle operazioni dei N[i] 4 e 6;

Fascio di raggi una figura $a.b.c...$ costituita da rette poste in un piano e uscenti da un punto fisso (centro del fascio); tale è la figura che nascerebbe se si applicasse l'operazione del N° 2 ad una punteggiata, ovvero quella del N° 3 ad un fascio di piani;

Sistema piano (piano punteggiato o piano rigato) una figura costituita da punti e rette tutte giacenti in un medesimo piano: tale è la figura che nasce dall'operazione del N° 3;

Stella una figura costituita da rette e piani passanti per un punto fisso (centro della stella), quale è quella che risulta dall'operazione del N° 2.

22. Le prime tre figure si possono dedurre l'una dall'altra mediante una projezione o una sezione. Infatti [1]:

Da una punteggiata $A.B.C...$ si ricava il fascio di piani $s(A.B.C...)$ projettando quella da un asse s (N° 4); si ricava invece il fascio di raggi $O(A.B.C...)$ projettando la medesima da un centro O (N° 2);

Da un fascio di piani $\alpha.\beta.\gamma...$ si ricava la punteggiata $s(\alpha.\beta.\gamma...)$ segando quello con una trasversale s (N° 5), e si ricava invece il fascio di raggi $\sigma(\alpha.\beta.\gamma...)$ segando il fascio dato con un piano trasversale σ (N° 3);

Da un fascio di raggi $a.b.c...$ si deduce la punteggiata $\sigma(a.b.c...)$ segandolo con un piano trasversale σ (N° 3); si ottiene invece il fascio di piani $O(a.b.c...)$ se si projetta il fascio dato da un centro O (N° 2).

23. Analogamente le ultime due figure del N° 21 si deducono l'una dall'altra con una di quelle operazioni (N[i] 2, 3); infatti, se da un centro O si projetta un piano punteggiato o rigato, si ottiene una stella; e viceversa, se con un piano trasversale si sega una stella, si ottiene un piano punteggiato o rigato. Due figure piane prospettive (N° 9) sono due sezioni di una medesima stella.

[1] Indichiamo con $s(A.B.C...)$ la serie dei piani sA, sB, sC, ...; con $O(A.B.C...)$ la serie de' raggi OA, OB, OC, ...; con $s(\alpha.\beta.\gamma...)$ la serie de' punti $s\alpha$, $s\beta$, $s\gamma$, ...; con $\sigma(\alpha.\beta.\gamma...)$ la serie delle rette $\sigma\alpha$, $\sigma\beta$, $\sigma\gamma$, ... ecc. Usiamo indifferentemente le scritture $A.B.C...$, $ABC...$ per indicare la serie de' punti A, B, C, ..., ecc.

24. Elementi della punteggiata sono i punti; del fascio di piani, i piani; del fascio di raggi, le rette o raggi.

Nel sistema piano possono considerarsi come elementi tanto i punti quanto le rette. Considerando come elementi i punti, le rette del piano (punteggiato) sono altrettante punteggiate; invece se si considerano come elementi le rette (raggi), i punti del piano (rigato) sono i centri d'altrettanti fasci di raggi.

Il piano punteggiato (nel quale gli elementi sono i punti) contiene adunque infinite punteggiate (1); e il piano rigato (nel quale gli elementi sono i raggi) contiene infiniti fasci di raggi (2).

Nella stella si possono considerare come elementi tanto i piani quanto le rette o raggi. Assumendo come elementi i piani, le rette della stella sono assi di altrettanti fasci di piani; invece se si considerano come elementi le rette, i piani della stella sono altrettanti fasci di raggi.

La stella contiene adunque infiniti fasci di piani o infiniti fasci di raggi, secondo che in essa si considerino come elementi i piani o le rette.

25. Anche lo spazio a tre dimensioni (sia esteso all'infinito, o sia una porzione limitata di esso) può essere concepito come una figura geometrica, gli elementi della quale siano i punti o i piani.

Assumendo come elementi i punti, le rette dello spazio sono altrettante punteggiate, e i piani dello spazio altrettanti piani punteggiati. Invece assumendo come elementi i piani, le rette dello spazio sono assi d'altrettanti fasci di piani, e i punti dello spazio sono i centri di altrettante stelle. Lo spazio contiene adunque infiniti piani punteggiati (3) o infinite stelle (4), secondo che per costruirlo s'intenda assunto come elemento il punto o il piano.

26. Le prime tre figure, cioè la punteggiata, il fascio di piani ed il fascio di raggi, le quali hanno la proprietà di potersi dedurre l'una dall'altra mediante una delle operazioni (Ni 2, 3, ..), si

(1) Una di esse ha tutt'i suoi punti a distanza infinita; ciascuna delle altre ha un solo punto all'infinito (Ni 10 e 11).

(2) La retta all' infinito appartiene a infiniti fasci di raggi, ciascun de' quali ha il centro a distanza infinita, cioè consta di raggi tutti paralleli.

(3) Uno de' quali è interamente a distanza infinita (N° 20).

(4) Fra le quali ve ne sono ancora infinite che hanno il centro ad istanza infinita, cioè che constano di raggi paralleli.

abbracciano insieme colla denominazione di forme geometriche fondamentali di 1ª specie.

La quarta e la quinta figura, cioè il piano punteggiato o rigato e la stella, che si deducono parimente l'una dall'altra con una delle operazioni (Nⁱ 2, 3) e che oltre a ciò hanno la proprietà di contenere entro di sè infinite forme fondamentali di 1ª specie, diconsi forme geometriche fondamentali di 2ª specie.

Lo spazio, che comprende in sè infinite forme di 2ª specie, vien considerato come forma fondamentale di 3ª specie.

Le forme geometriche fondamentali sono adunque sei: tre di 1ª, due di 2ª ed una di 3ª specie.

§ 6. Principio di dualità.

27. La geometria, in generale, studia la generazione e le proprietà delle figure contenute: 1° nello spazio a tre dimensioni; 2° in un piano; 3° in una stella. In tutti e tre questi casi ciascuna figura contenuta non è altro che un complesso d'elementi, o, ciò che torna lo stesso, il complesso delle posizioni assunte da un elemento mobile o variabile. L'elemento mobile, generatore delle figure, può essere nel 1° caso il punto o il piano, nel 2° il punto o la retta, nel 3° il piano o la retta. Perciò vi sono sempre due maniere correlative o reciproche di generare figure e svolgerne le proprietà: e in ciò consiste la dualità geometrica, che è la coesistenza delle figure (e quindi delle loro proprietà) a due a due: due figure coesistenti (correlative o reciproche) avendo la stessa genesi e non differendo tra loro se non per la natura dell'elemento generatore.

Nella geometria dello spazio a tre dimensioni sono forme correlative la punteggiata e il fascio di piani; il piano punteggiato e la stella, concepita come formata da piani; il piano rigato e la stella concepita come formata da raggi. Il fascio di raggi è una forma correlativa a sè medesima.

Nella geometria del piano sono forme correlative la punteggiata e il fascio di raggi.

Nella geometria della stella sono forme correlative il fascio di piani e il fascio di raggi.

La geometria del piano e la geometria della stella, considerate nello spazio a tre dimensioni, sono esse stesse correlative fra loro.

28. Ecco alcuni esempi di proposizioni correlative nella geometria dello spazio. Due proposizioni correlative si ricavano l'una dall'altra mediante lo scambio degli elementi punto e piano.

a) Due punti A, B determinano una retta (la retta AB che passa pei punti dati), la quale contiene infiniti altri punti.

Due piani α, β determinano una retta (la retta $\alpha\beta$, secondo la quale i piani dati si segano), per la quale passano infiniti altri piani.

b) Una retta a ed un punto B non situato in essa determinano un piano: il piano aB che congiunge la retta col punto.

Una retta a ed un piano β non passante per essa determinano un punto: il punto $a\beta$ nel quale la retta incontra il piano.

c) Tre punti A, B, C, non situati in una medesima retta, determinano un piano: il piano ABC, che passa pei tre punti.

Tre piani α, β, γ, non passanti per una medesima retta, determinano un punto: il punto $\alpha\beta\gamma$, nel quale i tre piani si segano.

d) Due rette che hanno un punto comune giacciono in uno stesso piano.

Due rette poste in uno stesso piano hanno un punto comune.

e) Dati quattro punti A, B, C, D, se le rette AB, CD si segano, i quattro punti sono in uno stesso piano, epperò si segano anche le rette BC e AD, ed anche CA e BD.

Dati quattro piani α, β, γ, δ, se le rette $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ si segano, i quattro piani concorrono in un medesimo punto; epperò si segano anche le rette $\beta\gamma$ e $\alpha\delta$, ed anche $\gamma\alpha$ e $\beta\delta$.

f) Se quante rette si vogliono a due a due si segano, e non passano tutte per un medesimo punto, giacciono tutte in un medesimo piano (rette di un piano rigato) (1).

Se quante rette si vogliono a due a due si segano, e non giacciono tutte in un medesimo piano, passano tutte per uno stesso punto (rette di una stella) (2).

g) Il problema seguente: « In un piano α, per un punto A dato in esso, condurre una retta che seghi una retta data r » (che non giaccia in α, nè passi per A), ammette due soluzioni correlative:

Si congiunga il punto A col punto $r\alpha$.

Si costruisca l'intersezione del piano α col piano rA.

h) Problema. — Per un punto dato A condurre una retta che seghi due rette date b, c (le quali non giacciano

Problema. — In un dato piano α condurre una retta che seghi due rette date b, c (le quali non abbiano

(1) Vedi la nota al N° 19.

(2) Siano infatti le rette a, b, c,...; siccome ab, ac, bc son tre piani distinti, così nel punto ad essi comune concorrono le rette a, b, c, ecc.

in uno stesso piano, nè alcuna di esse passi per A).

SOLUZIONE. — Si costruisca l'intersezione dei piani Ab, Ac.

un punto comune, nè alcuna di esse giaccia in α).

SOLUZIONE. — Si congiunga il punto ab col punto ac.

29. Nella geometria a tre dimensioni, la figura correlativa di un triangolo (sistema di tre punti) è un triedro (sistema di tre piani): al piano, ai vertici, ai lati del triangolo sono rispettivamente correlativi il vertice, le facce, gli spigoli del triedro. Laonde il teorema correlativo a quello del N° 13 sarà il seguente:

Se due triedri $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$ hanno la proprietà che gli spigoli $\beta'\gamma'$ e $\beta''\gamma''$, $\gamma'\alpha'$ e $\gamma''\alpha''$, $\alpha'\beta'$ ed $\alpha''\beta''$ giacciano in tre piani α_0, β_0, γ_0 passanti per una stessa retta, le rette $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$ sono situate in uno stesso piano.

La dimostrazione è la stessa del teorema al N° 13, scambiati fra loro gli elementi punto e piano. Per es. se i due triedri hanno vertici differenti S', S'', i punti in cui si segano le coppie di spigoli sono i vertici di un triangolo, i cui lati sono le rette $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$; queste sono adunque in un piano (il piano del triangolo).

Così pure, nel caso che i due triedri abbiano lo stesso vertice S, la dimostrazione sarà correlativa a quella del caso analogo de'due triangoli $A'B'C'$, $A''B''C''$ (situati in uno stesso piano) nel N° 13. Il teorema può anche stabilirsi projettando da un punto S la figura che esprime il teorema del N° 12, b).

Il giovane studioso può proporsi per esercizio la dimostrazione del teorema correlativo a quello del N° 12, cioè:

Se due triedri $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$ sono tali che le rette $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$ giacciano in un piano, le coppie di lati $\beta'\gamma'$ e $\beta''\gamma''$, $\gamma'\alpha'$ e $\gamma''\alpha''$, $\alpha'\beta'$ e $\alpha''\beta''$ determinano tre piani passanti per una medesima retta.

30. Nella geometria piana due figure o due proposizioni correlative si deducono l'una dall'altra mediante lo scambio degli elementi punto e retta. Ecco qualche esempio [1]:

a) Due punti A, B determinano una retta: la retta AB.

b) Quattro punti A, B, C, D (figura 11ª), tre qualunque de' quali non siano in linea retta, costituiscono una figura che si denomina quadrangolo completo. Diconsi vertici del quadrangolo completo i quattro punti suddetti; lati del me-

Due rette a, b determinano un punto: il punto ab.

Quattro rette a, b, c, d (fig. 12ª) tre qualsivogliano delle quali non concorrano in un punto, costituiscono una figura che si denomina quadrilatero completo. Diconsi lati del quadrilatero completo le quattro rette; vertici del medesimo i sei

[1] Dove, ben inteso, i punti e le rette giacciono in un solo e medesimo piano.

desimo le sei rette che li uniscono a due a due. Due lati che non passino per uno stesso vertice diconsi **opposti**; vi sono dunque tre coppie di lati opposti, cioè *BC* e *AD*, *CA* e *BD*, *AB* e *CD*. I punti *E*, *F*, *G* dove concorrono i lati opposti diconsi **punti diagonali**; e il triangolo *EFG* dicesi **triangolo diagonale** del quadrangolo completo.

Nel quadrangolo completo sono contenuti tre quadrangoli o quadrilateri semplici *ACBD*, *ABCD*, *ABDC* (fig. 13ª).

punti ne' quali esse si segano a due a due. Due vertici diconsi **opposti** se non sono situati in uno stesso lato. Vi sono dunque tre coppie di vertici opposti, cioè *bc* e *ad*, *ca* e *bd*, *ab* e *cd*. Le rette *e*, *f*, *g* che uniscono i vertici opposti diconsi **rette diagonali**; ed il triangolo *efg* dicesi **triangolo diagonale** del quadrilatero completo.

Nel quadrilatero completo sono contenuti tre quadrilateri o quadrangoli semplici *acbd*, *abcd*, *abdc* (fig. 14ª).

c) In generale:

Poligono (*n*-**gono**) completo è il sistema di *n* punti o **vertici** considerati insieme con tutte le $\frac{n(n-1)}{2}$ rette o **lati** che li uniscono a due a due.

Moltilatero (*n*-**latero**) completo è il sistema di *n* rette o **lati** considerati insieme con tutti gli $\frac{n(n-1)}{2}$ punti o **vertici** ne' quali esse s'intersecano a due a due.

d) Il teorema del N° 12 e quello del N° 13, ne' quali i due triangoli $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ siano supposti situati in un medesimo piano, sono correlativi fra loro.

e) Se due quadrangoli completi *ABCD*, *A'B'C'D'* hanno la proprietà che i lati *AB* ed *A'B'*, *BC* e *B'C'*, *CA* e *C'A'*, *AD* e *A'D'*, *BD* e *B'D'* si seghino in cinque punti di una retta *s*, anche i due lati rimanenti *CD* e *C'D'* si segheranno in un punto della medesima retta *s* (fig. 15ª).

Infatti, in virtù dell'ipotesi (N° 13), i triangoli *ABC*, *A'B'C'* sono prospettivi, epperò le rette *AA'*, *BB'*, *CC'* concorrono in uno stesso punto *S*. Medesimamente sono prospettivi i triangoli *ABD*, *A'B'D'*, dunque anche *DD'* passa pel punto *S* comune alle *AA'*, *BB'*. Da ciò segue che sono pure prospettivi i triangoli *BCD*, *B'C'D'*; dunque *CD* e *C'D'* si segano in un

Se due quadrilateri completi *abcd*, *a'b'c'd'* hanno la proprietà che le coppie di vertici *ab* ed *a'b'*, *bc* e *b'c'*, *ca* e *c'a'*, *ad* e *a'd'*, *bd* e *b'd'* si trovino su cinque rette concorrenti in un punto *S*, anche i due vertici rimanenti *cd* e *c'd'* saranno allineati con *S* (fig. 16ª).

Infatti, per l'ipotesi (N° 12) i triangoli *abc*, *a'b'c'* sono prospettivi; dunque i punti *aa'*, *bb'*, *cc'* sono in una stessa retta *s*. Analogamente sono prospettivi i triangoli *abd*, *a'b'd'*, epperò anche il punto *dd'* è nella retta *s* che passa pei punti *aa'*, *bb'*. Da ciò segue che sono pure prospettivi i triangoli *bcd*, *b'c'd'*; dunque *cd* e *c'd'* sono in linea retta col punto *S* che è determi-

punto della retta s determinata dal punto comune a BC e $B'C'$ e dal punto comune a BD e $B'D'$; c. d. d. [1].

nato dalla retta $(bc)(b'c')$ e dalla retta $(bd)(b'd')$, c. d. d.

31. Nella geometria dello spazio, ad un poligono (piano) completo di n vertici è correlativo un angolo poliedro completo di n facce, cioè la figura costituita da n piani (facce) concorrenti in uno stesso punto (vertice dell'angolo poliedro) e considerati insieme colle $\frac{n(n-1)}{2}$ rette (spigoli), secondo le quali essi si segano a due a due. E ad un moltilatero (piano) completo di n lati è correlativo un angolo moltispigolo completo, di n spigoli, cioè la figura costituita da n rette (spigoli) uscenti da uno stesso punto (vertice dell'angolo moltispigolo) e considerate insieme cogli $\frac{n(n-1)}{2}$ piani (facce) ch'esse, prese a due a due, determinano.

Per es., ai due teoremi che precedono (N° 30, e), e che nella geometria piana sono correlativi fra loro, nella geometria a tre dimensioni saranno rispettivamente correlativi i seguenti:

Se due angoli tetraedri completi (dello stesso vertice o no) $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ hanno la proprietà che cinque coppie di spigoli corrispondenti giacciano in cinque piani passanti per una retta s, anche la sesta coppia di spigoli giacerà in un piano passante per la medesima retta.

Se due angoli quadrispigoli completi (dello stesso vertice o no) $abcd$, $a'b'c'd'$ hanno la proprietà che cinque coppie di facce corrispondenti si seghino secondo cinque rette contenute in un piano σ, anche la retta comune alla sesta coppia di facce giacerà nel medesimo piano σ.

Lasciamo al giovane studioso di trovare per esercizio le dimostrazioni di questi teoremi, le quali del resto differiscono da quelle dei teoremi e) soltanto per lo scambio degli elementi punto e piano; e come i teoremi e) sono una conseguenza di quelli esposti ai N[i] 12 e 13, così i teoremi presenti si fondano su quelli del N° 29.

Se i due angoli tetraedri hanno uno stesso vertice O, il teorema a sinistra si può anche stabilire col projettare da O (N° 2) la figura che esprime il teorema e) a destra. E nella stessa ipotesi e collo stesso processo si ricava il teorema attuale a destra dal teorema e) a sinistra.

32. Nella geometria della stella due proposizioni o due figure correlative si ricavano l'una dall'altra mediante lo scambio degli elementi piano e retta. Siccome la geometria della stella è correlativa a quella del piano, rispetto allo

[1] Questi due teoremi sono dati qui come esempi per la geometria piana; ma le dimostrazioni valgono, senz'alcuna mutazione, anche nel caso che i due quadrangoli o quadrilateri giacciano in piani differenti.

spazio a tre dimensioni, così l'una geometria si ricava dall'altra collo scambio degli elementi punto e piano. La geometria della stella si può anche ricavare da quella del piano mediante projezione da un centro (N° 2).

Dalla geometria della stella si ricava la geometria delle figure sferiche, tagliando la stella con una sfera passante pel centro della stella medesima.

§ 7. Forme projettive.

33. Mediante projezione da un centro si deduce da una punteggiata un fascio di raggi, da un fascio di raggi un fascio di piani, da un piano (punteggiato o rigato) una stella. Viceversa, mediante sezione con un piano trasversale si ritorna dal fascio di raggi alla punteggiata, dal fascio di piani al fascio di raggi, dalla stella al piano. Perciò le due operazioni — projettare da un centro, segare con un piano trasversale — si possono risguardare come complementari; sicchè diremo che, se una forma è dedotta da un'altra mediante una di quelle operazioni, viceversa si potrà coll'operazione complementare ricavare la seconda forma dalla prima.

Suppongasi ora che da una data forma f_1 si deduca mediante un'operazione (projezione o sezione) una forma f_2; che da f_2 mediante un'altra operazione si cavi f_3; che con una terza operazione da f_3 si cavi f_4; e così di seguito, finchè eseguite n-1 operazioni, si giunga ad una forma f_n. Viceversa, noi potremo retrocedere da f_n ad f_1 mediante un'altra serie di n-1 operazioni: le quali siano ordinatamente complementari dell'ultima, della penultima, della terz'ultima,... fra le operazioni che hanno servito per passare da f_1 ad f_n. La serie delle operazioni che conducono da f_1 ad f_n, e la serie di quelle che riconducono da f_n ad f_1 si possono denominare complementari; così che le operazioni dell'una serie sono ordinatamente complementari di quelle dell'altra, prese in ordine retrogrado.

In ciò che precede, le forme geometriche sono concepite nello spazio a tre dimensioni (N° 25). Se ci limitassimo alla geometria piana, le operazioni complementari sarebbero il projettare da un centro e il segare con una retta trasversale. Invece nella geometria della stella, sono operazioni complementari il segare con un piano e il projettare da un asse.

34. Due forme fondamentali della stessa specie diconsi projettive, se l'una può dedursi dall'altra mediante un numero finito

qualunque di projezioni e di sezioni (N[i] 2, 3,... 7). Per esempio, se si ha una punteggiata u_1, e si projetti da un centro O, ne nascerà un fascio di raggi; questo si projetti da un altro centro O', sicchè ne risulti un fascio di piani, avente l'asse OO'; questo fascio si seghi con una retta u_2; la punteggiata u_2 si projetti da un asse e il fascio di piani che ne risulta si seghi con un piano trasversale, donde si caverà un fascio di raggi, ecc. Or bene: due qualunque delle forme geometriche di 1ª specie così ottenute sono, per definizione, projettive.

Quando si dice che una forma $A.B.C.D$... è projettiva ad un'altra forma $A'.B'.C'.D'$..., s'intende che, mediante una medesima serie di operazioni (projezioni e sezioni) A' nasce da A, B' da B, C' da C, ecc.

Gli elementi A ed A', B e B', C e C',... diconsi corrispondenti.

35. Di qui si ricava subito che due forme projettive ad una terza sono projettive fra loro. Infatti: eseguendo prima le operazioni che servono per passare dalla 1ª alla 3ª forma, e poi quelle colle quali si passa dalla 3ª alla 2ª, si sarà effettuato il passaggio dalla 1ª alla 2ª forma.

36. Diconsi prospettive

due punteggiate (fig. 17ª) se sono sezioni di uno stesso fascio di raggi (cfr. N° 9);

due fasci di raggi (fig. 18ª) se projettano una medesima punteggiata da due centri diversi, ovvero se sono sezioni di uno stesso fascio di piani (1);

due fasci di piani se projettano uno stesso fascio di raggi da due centri diversi;

(1) Se si projetta una punteggiata $u \equiv ABC$... da due centri diversi O, O' non situati in uno stesso piano colla punteggiata, si ottengono due fasci (prospettivi) di raggi, che sono inoltre sezioni fatte coi piani trasversali Ou, Ou' in uno stesso fascio di piani, avente per asse la retta OO' e composto de' piani $OO'A$, $OO'B$, $OO'C$,.... Questo è il caso generale di due fasci prospettivi di raggi: essi non hanno lo stesso centro, nè giacciono in uno stesso piano; e ad un tempo projettano una stessa punteggiata e sono sezioni di un medesimo fascio di piani. Vi sono poi due casi particolari: 1° se si projetta la punteggiata u da due centri O, O' posti in un piano con u; allora i due fasci di raggi giacciono in uno stesso piano, epperò non sono più sezioni di un fascio di piani; 2° se un fascio di piani vien segato da due piani trasversali passanti per uno stesso punto O dell'asse, si ottengono due fasci di raggi che hanno lo stesso centro O, epperò non projettano più una medesima punteggiata.

una punteggiata ed un fascio di raggi, ovvero un fascio di raggi e un fascio di piani, se la prima forma è una sezione della seconda;

due piani se sono sezioni di una medesima stella;

due stelle se projettano uno stesso piano da due centri diversi;

un piano ed una stella se il piano è una sezione della stella.

Dalla definizione del N° 34 segue immediatamente che due forme prospettive sono anche projettive. Ma viceversa due forme projettive non sono generalmente collocate in posizione prospettiva.

37. Due forme geometriche di 1ª specie, composte ciascuna di tre elementi, sono sempre projettive. Per dimostrare quest'asserzione, osservo anzitutto che basta considerare il caso di due punteggiate ABC, $A'B'C'$; giacchè, se alcuna delle forme proposte fosse un fascio, si potrebbe ad essa sostituire una sezione della medesima, fatta con una trasversale.

Se le due rette ABC, $A'B'C'$ non sono in uno stesso piano, conducansi le rette AA', BB', CC', e quindi si seghino le tre congiungenti con una trasversale s (1). Allora le due forme date non saranno altro che due sezioni del fascio di piani sAA', sBB', sCC'.

Se le due rette ABC, $A'B'C'$ sono in uno stesso piano (fig. 19ª), prendansi nella retta AA' due punti S, S', e siano: B'' l'intersezione di SB con $S'B'$; C'' l'intersezione di SC con $S'C'$; A'' l'intersezione di SS' con $B''C''$. Allora sarà $A''B''C''$ una projezione tanto di ABC, quanto di $A'B'C'$, rispettivamente vedute dai centri S, S'.

Nel caso poi che i punti A, A' coincidano (fig. 20ª), le due forme date sono a dirittura prospettive; il centro di projezione è il punto comune alle BB', CC'.

Finalmente, se le due terne de' punti ABC, $A'B'C'$ (fig. 21ª) fossero in una medesima retta, basterebbe projettare una di esse $A'B'C'$ sopra un'altra retta in $A_1B_1C_1$, e si ricadrebbe in uno de' casi già considerati.

Per esempio, se si volesse projettare ABC in BAC (fig. 22ª), basterebbe prendere ad arbitrio due punti L, N allineati con C; sia K il punto di concorso delle AL, BN; ed M quello ove si

(1) A quest'uopo, basta condurre da un punto arbitrario di AA' una retta che incontri BB' e CC': vedi il problema *h*) al N° 28.

segano le BL, AN; allora sarà LNC una projezione di ABC dal centro K, e poi BAC una projezione di LNC dal centro M.

Se si volesse projettare ABC in BCA, si potrebbe projettare dapprima ABC in BAC, poi BAC in BCA.

§ 8. Forme armoniche.

38. Teorema [1]. — Se in una retta s sono dati tre punti A, B, C, e se si costruisce un quadrangolo completo ($KLMN$), in modo che due lati opposti (KL, MN) concorrano in A, altri due lati opposti (KN, ML) concorrano in B, e il quinto lato (LN) passi per C, il sesto lato (KM) segherà la retta data in un punto D, che è determinato mediante i tre dati, cioè non varia, comunque si mutino gli elementi arbitrari del quadrangolo (fig. 22ª).

Dim. — Infatti, se si costruisce un secondo quadrangolo completo $K'L'M'N'$, il quale soddisfaccia alle prescritte condizioni; siccome allora i due quadrangoli hanno cinque paja di lati corrispondenti che concorrono sulla retta data, così anche il sesto pajo concorrerà sulla retta medesima (N° 30, *e*, a sinistra).

Donde segue che, se si tiene fisso il primo quadrangolo, e si varia il secondo in tutt'i modi possibili, il punto D rimane fisso, c. d. d.

I quattro punti $ABCD$ diconsi a r m o n i c i, ovvero si dice che la forma geometrica costituita dai quattro punti suddetti è a r m o n i c a.

Vale a dire, quattro punti $ABCD$ di una retta, considerati nell'ordine col quale sono enun-

Se tre rette date (in un piano) a, b, c concorrono in un punto S e se si costruisce un quadrilatero completo ($klmn$), in modo che due vertici opposti (kl, mn) cadano in a, altri due vertici opposti (kn, ml) cadano in b, e il quinto vertice (ln) si trovi in c, il sesto vertice (km) cadrà in una retta d passante pel punto dato, la quale è determinata, cioè non varia, comunque si mutino gli elementi arbitrari del quadrilatero (fig. 23ª).

Infatti, se si costruisce un secondo quadrilatero completo $k'l'm'n'$, il quale soddisfaccia alle prescritte condizioni, siccome allora i due quadrilateri hanno cinque paja di vertici corrispondenti allineate col punto dato, così anche il sesto pajo sarà in linea retta col punto medesimo (N° 30, *e*, a destra).

Donde segue che, se si tiene fisso il primo quadrilatero, e si varia il secondo in tutt'i modi possibili, la retta d rimane fissa, c. d. d.

Le quattro rette (o i quattro raggi) $abcd$ diconsi a r m o n i c h e; ovvero si dice che la forma geometrica costituita da coteste quattro rette è a r m o n i c a.

Vale a dire, quattro raggi $abcd$ di un fascio, considerati nell'ordine col quale sono enun-

[1] Staudt, *Geometrie der Lage* (Nürnberg 1847), N° 93.

ciati, denominansi armonici, se è possibile di costruire un quadrangolo completo i cui lati passino, due opposti per A, altri due opposti per B, il quinto per C, il sesto per D. Dal teorema che precede risulta che, se un tale quadrangolo esiste, cioè se la forma $ABCD$ è armonica, si possono costruire infiniti altri quadrangoli sotto le medesime condizioni. Risulta inoltre che, dati tre punti ABC in linea retta (e dato l'ordine nel quale debbono essere considerati), il quarto punto D che con quelli costituisce una forma armonica è determinato ed unico, e si ottiene costruendo uno di quei quadrangoli (N° 50).

ciati, denominansi armonici, se è possibile di costruire un quadrilatero completo i cui vertici cadano, due opposti in a, altri due opposti in b, il quinto in c, il sesto in d. Dal teorema che precede risulta che, se un tale quadrilatero esiste, cioè se la forma $abcd$ è armonica, si possono costruire infiniti altri quadrilateri sotto le medesime condizioni. Risulta inoltre che, dati tre raggi abc di un fascio (e dato l'ordine nel quale debbono essere considerati), il quarto raggio d che con quelli costituisce una forma armonica è determinato ed unico, e si ottiene costruendo uno di quei quadrilateri (N° 50).

39. Se i punti armonici $ABCD$ si projettano da un punto S sopra un'altra retta, le projezioni $A'B'C'D'$ saranno ancora quattro punti armonici (fig. 24ª). Infatti, si imaginino due piani condotti rispettivamente per le due rette AB, $A'B'$, e nel primo piano si supponga costruito un quadrangolo completo, del quale due lati opposti concorrano in A, altri due opposti in B, e il quinto lato passi per C; il sesto lato passerà allora per D (N° 38), perchè la forma $ABCD$ è supposta essere armonica. Projettando ora da S questo quadrangolo sul secondo piano, si ottiene un nuovo quadrangolo, del quale due lati opposti si segano in A', altri due opposti in B', mentre il quinto e il sesto lato passano rispettivamente per C', D'; dunque $A'B'C'D'$ è una forma armonica.

40. La considerazione della figura 23ª mostra che i raggi armonici $abcd$ sono segati da qualunque trasversale, per esempio da m, in quattro punti $ABCD$, che sono armonici. Infatti, abbiamo ivi un quadrangolo $PQRS$, del quale due lati opposti (a, n) si segano in A, altri due lati opposti (b, l) in B, mentre il quinto (c) ed il sesto lato (d) passano rispettivamente per C, D.

Viceversa, suppongasi data la forma armonica $ABCD$ (fig. 23ª), ed assumasi ad arbitrio il centro di projezione S. Dico che i quattro raggi projettanti $S(A, B, C, D)$ sono armonici. Infatti, tirisi

a volontà una retta per A, che seghi SB in P, SC in Q; e quindi la BQ che seghi AS in R. Considerando il quadrangolo $PQRS$, del quale due lati opposti concorrono in A, altri due pure opposti in B, mentre il quinto lato SQ passa per C, concludiamo (N° 38 a sinistra) che, essendosi supposta armonica la forma $ABCD$, il sesto lato dee passare per D. Ma allora noi abbiamo un quadrilatero completo $klmn$, che ha due vertici opposti A, R in SA, altri due vertici opposti B, P in SB, il quinto vertice Q in SC ed il sesto vertice D in SD; dunque (N° 38 a destra) le quattro rette che da S projettano $ABCD$ sono armoniche. Laonde:

Quattro raggi armonici sono segati da una trasversale arbitraria in quattro punti armonici, e viceversa i raggi che projettano quattro punti armonici da un centro arbitrario sono armonici.

41. Il teorema del N° 38 a destra è correlativo (nella geometria piana) di quello che gli sta contro a sinistra, nel quale si suppongano tutt'i quadrangoli situati in uno stesso piano. Però il teorema del N° 38 a sinistra vale colla medesima dimostrazione anche se i quadrangoli sono costruiti in piani diversi.

Considerando adunque quest'ultimo teorema come una proposizione di geometria dello spazio a tre dimensioni, il teorema correlativo sarà il seguente:

Se tre piani dati α, β, γ passano per una stessa retta s, e se si costruisce un angolo tetraedro $\varkappa\lambda\mu\nu$ completo, del quale due spigoli $\varkappa\lambda$, $\mu\nu$ opposti siano nel piano α, altri due spigoli opposti $\varkappa\nu$, $\lambda\mu$ siano nel piano β, e lo spigolo $\lambda\nu$ cada in γ, il sesto spigolo $\varkappa\mu$ si troverà sempre in un piano determinato δ, che non muta comunque si disponga degli elementi arbitrari dell'angolo tetraedro.

Infatti, se (collo stesso vertice o con altro vertice) si costruisce un altro angolo tetraedro completo, che soddisfaccia alle prescritte condizioni, i due angoli tetraedri avranno cinque coppie di spigoli corrispondenti situate in piani che passano per una medesima retta s, epperò (N° 31 a sinistra) anche la sesta coppia giacerà in un piano contenente la retta s.

Diciamo armonici i quattro piani $\alpha\beta\gamma\delta$, ossia armonica la forma da essi costituita.

42. Segando l'angolo tetraedro $\varkappa\lambda\mu\nu$ con un piano arbitrario, non passante pel vertice, si ottiene un quadrilatero completo; e lo

stesso piano trasversale interseca i piani $\alpha\beta\gamma\delta$ secondo quattro raggi *abcd* di un fascio, de' quali i primi due contengono due coppie di vertici opposti del quadrilatero, mentre gli altri due passano rispettivamente per gli altri due vertici. Dunque (N° 38 a destra) quattro piani armonici $\alpha\beta\gamma\delta$ sono segati da un piano trasversale secondo quattro rette armoniche.

Così pure, se i quattro piani armonici $\alpha\beta\gamma\delta$ sono incontrati da una retta trasversale in quattro punti *ABCD*, la forma *ABCD* è armonica. Infatti, si conduca per la retta trasversale un piano, che seghi i piani $\alpha\beta\gamma\delta$ secondo le rette *abcd*; queste rette sono armoniche, come s'è or ora dimostrato. Ma *ABCD* è una sezione del fascio *abcd*; dunque (N° 40) *ABCD* sono quattro punti armonici.

43. Dunque, se colla denominazione di forma armonica indichiamo indifferentemente il gruppo di quattro punti o raggi o piani armonici, avremo il teorema:

Qualunque projezione o sezione di una forma armonica è una forma armonica. Ossia:

Ogni forma projettiva ad una forma armonica è pur essa una forma armonica.

a) Viceversa, due forme armoniche sono sempre projettive. Per dimostrare questa proprietà, basta considerare il caso di due gruppi di quattro punti, giacchè se una delle due forme fosse un fascio, segandolo con una trasversale, si otterrebbero quattro punti armonici. Supposto adunque che *ABCD*, *A'B'C'D'* sian due forme armoniche, si projetti *ABC* in *A'B'C'* nel modo che è spiegato al N° 37; le stesse operazioni (projezioni e sezioni) che servono a dedurre *A'B'C'* da *ABC* condurranno da *D* ad un punto D_1; donde segue che la forma $A'B'C'D_1$ sarà armonica, come lo è *ABCD*. Ma anche *A'B'C'D'* sono, per ipotesi, quattro punti armonici; dunque D_1 coincide con *D'*, giacchè i tre punti *A'B'C'* individuano il quarto punto che con essi dee costituire la forma armonica (N° 38 a sinistra); il che è quanto volevasi provare.

b) Aggiungiamo una conseguenza delle poste definizioni (N[i] 41 e 42):

La forma correlativa ad una forma armonica è pur essa armonica.

44. Se *a, b, c, d* (fig. 24ª) sono raggi di un fascio, si dice che *a, b* sono separati mediante *c, d*, quando un raggio che ruoti

descrivendo il fascio non può passare da a a b senza passare per uno (uno solo) degli altri due raggi c, d. La medesima definizione valga per quattro piani di un fascio, e per quattro punti A, B, C, D d'una punteggiata (fig. 24ª); purchè si ammetta che in una retta (fig. 25ª) si possa passare da un punto A ad un punto B in due modi, cioè o descrivendo il segmento finito AB, o descrivendo il segmento infinito che comincia in A, passa pel punto all'infinito e termina in B.

Premessa questa definizione, enunciamo la seguente proprietà che è evidente: Quattro elementi di una forma di 1ª specie (cioè quattro punti di una retta o quattro raggi di un fascio, ecc.) si possono sempre e in un sol modo distinguere in due coppie per modo che l'una sia separata mediante l'altra. Per es. nella figura 24ª, le due coppie che si separano scambievolmente sono AB, CD. E se $A'B'C'D'$ è una forma projettiva ad $ABCD$, saranno del pari $A'B'$ separati mediante $C'D'$, giacchè le operazioni e le sezioni non alterano la posizione relativa degli elementi.

45. Siano ora $ABCD$ quattro punti armonici (fig. 22ª); cioè quattro punti ottenuti colla costruzione del Nº 38 a sinistra, sicchè si possa costruire (in infinite maniere diverse) un quadrangolo completo, del quale A e B siano due punti diagonali (Nº 30, b, a sinistra), mentre per C e D passino due lati opposti. Basta enunciare questa costruzione per conoscere che i due punti A e B sono nella stessa condizione rispetto al sistema; e che son pure in un'identica condizione i punti C e D. Ne segue che, se $ABCD$ è una forma armonica, sono armoniche anche le forme $BACD$, $ABDC$, $BADC$, che si deducono da quella scambiando fra loro A con B, ovvero C con D. Perciò (Nº 43) la forma $ABCD$ è, a cagion d'esempio, projettiva alla forma $BADC$, cioè si potrà passare da quella a questa mediante un numero limitato di projezioni e sezioni. Infatti, projettando $ABCD$ da K sopra CQ, si ottiene la forma $LNCQ$; poi projettando questa da M sopra AB, si ottiene $BACD$.

46. Dico che nella forma armonica $ABCD$ i punti A e B sono necessariamente separati (Nº 44) mediante gli altri due. Infatti, si projetti (fig. 22ª) la forma $ABCD$ sulla retta KM, prima dal centro L, poi dal centro N; le projezioni che ne risultano sono le forme $KMQD$, $MKQD$. Queste dovranno presentare la stessa maniera di separazione, giacchè constano degli stessi elementi: dunque

i punti *K, M* sono separati mediante *Q*, *D*; epperò *A*, *B* sono separati mediante *C*, *D*.

47. Conducansi (fig. 26ª) le rette *AQ*, *BQ* che incontrino *NK* ed *LM*, *KL* ed *MN* rispettivamente ne' punti *S*, *U*, *T*, *V*. Il quadrangolo completo *LTQU* ha due lati opposti concorrenti in *A*, altri due (pure opposti) concorrenti in *B*, e il quinto lato (*LQ* ossia *LN*) passante per *C*; dunque il sesto lato *TU* passerà per *D* (N° 38). Così pure passerà per *D* il sesto lato *VS* del quadrangolo completo *NVQS*; e passeranno per *C* i sesti lati *ST*, *UV* de' quadrangoli completi *KSQT*, *MUQV*. Per tal modo si ottiene un quadrangolo *STUV*, del quale due lati opposti concorrono in *C*, altri due pure opposti si segano in *D*, mentre il quinto e il sesto lato passano rispettivamente per *A*, *B*. Ciò significa che la condizione comune (N° 45) ai punti *C*,*D* è la stessa che quella comune ai punti *A* e *B*; vale a dire, la coppia *A*, *B* può essere scambiata colla coppia *C*, *D*. Dunque se *ABCD* è una forma armonica, non solo sono armoniche le forme *BACD*, *ABDC*, *BADC*, ma eziandio le forme *CDAB*, *CDBA*, *DCAB*, *DCBA* (1).

I punti *A* e *B* diconsi conjugati fra loro, e conjugati per conseguenza anche i punti *C* e *D*.

Si dice che i punti *A*, *B* sono separati armonicamente mediante i punti *C*, *D*; ovvero che i punti *C*, *D* sono separati armonicamente mediante *A* e *B*; che il segmento *AB* è diviso armonicamente dai punti *C*, *D* o dal segmento *CD*, ecc. Se due punti dati *A*, *B* (fig. 22ª) sono separati armonicamente mediante i punti *C*, *D* in cui la congiungente *AB* è segata da due rette *QC*, *QD*, si suole ancora dire che i punti *A*, *B* sono armonicamente separati mediante le rette *QC*, *QD*, ovvero mediante il punto *C* e la retta *QD*, ecc.; e che le rette *QC*, *QD* sono armonicamente separate mediante i punti *A*, *B*, ecc.

Analoghe proprietà e denominazioni valgono per quattro raggi o per quattro piani armonici.

48. Dalla proposizione del N° 38 (sinistra) si può anche cavare il seguente enunciato: In un quadrilatero completo, ciascuna diagonale è divisa armonicamente dalle altre due (2).

(1) Reye, *Geometrie der Lage* (Hannover 1866), t. I, p. 34.
(2) Carnot, *Géométrie de position* (Paris 1803), N° 225. — Cfr. Baltzer, *Trigonometria*, p. 147.

Sia per esempio il quadrilatero completo (fig. 27ª) i cui vertici opposti sono A ed A', B e B', C e C'. La diagonale AA' è incontrata in E, F dalle altre due diagonali BB', CC'. Ora si consideri il quadrangolo completo $BB'CC'$ del quale due lati opposti concorrono in A, due altri lati opposti in A', mentre il quinto e il sesto passano rispettivamente per E, F. Dunque i punti AA' sono separati armonicamente dai due E, F. Analogamente, la considerazione dei due quadrangoli completi $CC'AA'$, $AA'BB'$ conduce a concludere la medesima proprietà per gli altri due gruppi $BB'FD$, $CC'DE$.

49. Nel quadrangolo completo $BB'CC'$, i punti diagonali sono A, A', D; ora dall'essere armonico il gruppo di punti $BB'FD$ segue che la stessa proprietà è posseduta dal gruppo de' quattro raggi che li projettano da A (N° 40); dunque:

In un quadrangolo completo, due lati concorrenti in un punto diagonale sono separati armonicamente mediante gli altri due punti diagonali.

Del resto, questo teorema non è altro che il correlativo (giusta la dualità nella geometria del piano) di quello dimostrato nel N° precedente.

50. I teoremi del N° 38 dànno subito il modo di risolvere colla sola riga i problemi:

Dati tre punti di una forma armonica, costruire il quarto punto.

Soluzione. — Siano (fig. 22ª) A, B, C i punti dati (in linea retta), e debbano essere A e B conjugati fra loro. Tirinsi ad arbitrio due rette per A ed una per C, la quale seghi le prime due in L, N. Le congiungenti BL, BN seghino rispettivamente le AN, AL in M, K; la congiungente KM segherà la retta data nel punto cercato D, conjugato a C [1].

Dati tre raggi di un fascio armonico, costruire il quarto raggio.

Siano (fig. 23ª) a, b, c i raggi dati (uscenti da uno stesso centro ed in uno stesso piano), e debbano essere a, b conjugati fra loro. Per un punto Q di c conducansi ad arbitrio due rette che seghino a in A, R, e b in P, B. Le congiungenti AB, RP si segheranno in un punto D che unito col punto dato darà il raggio cercato d, conjugato a c.

51. Sia C (fig. 28ª) il punto di mezzo fra A e B (N° 50, a sinistra). Allora potremo disporre degli elementi arbitrari in modo che K ed M vadano a distanza infinita: e ciò col costruire un parallelogrammo $ALBN$ sulla

[1] Delahire, *Sectiones conicæ* (Parisiis 1685), p. 9.

diagonale AB; l'altra diagonale LN passerà per C. Dunque il punto D cadrà all'infinito.

Viceversa, se supponiamo dati i punti A, B, D, il terzo de' quali sia all'infinito, potremo ancora costruire sulla diagonale AB un parallelogrammo $ALBN$; il quarto punto C, conjugato a D, dovendo risultare dall'intersezione della retta data colla LN, sarà il punto di mezzo di AB. Dunque:

Se di quattro punti armonici $ABCD$, uno C è il punto di mezzo fra due punti conjugati A e B, il quarto è a distanza infinita; e viceversa, se uno è all'infinito, il suo conjugato è il punto di mezzo fra gli altri due.

52. Sia c (fig. 29ª) la bissettrice dell'angolo ab (N° 50, a destra). Prendendo Q all'infinito in c, i segmenti AB, PR risultano uguali e compresi fra le parallele AP, BR, perciò il raggio d sarà perpendicolare a c. Cioè:

Se di quattro raggi armonici $abcd$, uno c fa angoli uguali con due conjugati a e b, il quarto d è perpendicolare a c.

Viceversa, se in un fascio armonico $abcd$ (fig. 30ª), due raggi conjugati c, d sono rettangolari, essi saranno le bissettrici degli angoli fra gli altri due. Infatti, segando il fascio (il cui centro sia S) con una trasversale parallela a d, la sezione $ABCD$ è costituita da quattro punti armonici (N° 40); e siccome D è all'infinito, così C sarà il punto di mezzo fra A e B (N° 51). Dunque ASB è un triangolo isoscele, e conseguentemente SC è la bissettrice dell'angolo al vertice.

§ 9. Rapporti anarmonici.

53. Si riprenda la figura 2ª che rappresenta la projezione de' punti di una retta u sopra un'altra retta u', fatta da un centro O; e cerchiamo la relazione che ha luogo fra due segmenti corrispondenti AB, $A'B'$. I triangoli simili OAJ, $A'OI'$ dànno

$$JA : JO = I'O : I'A' \text{ (1)},$$

e analogamente dai triangoli simili OBJ, $B'OI'$ si ha

$$JB : JO = I'O : I'B',$$

donde

$$JA \,.\, I'A' = JB \,.\, I'B' = JO \,.\, I'O,$$

(1) In tutte le equazioni fra segmenti intendiamo osservata la regola o convenzione de' segni, in virtù della quale AB e BA sono riguardate come grandezze uguali e di segno opposto; donde segue che se A, B, O sono tre punti in linea retta, si ha $AB + BO + OA = 0$ ossia $AB = OB - OA$. Veggasi in proposito Baltzer, *Planim.*, pag. 168, e *Trigon.*, pag. 123.

cioè il rettangolo $JA \,.\, I'A'$ è costante, qualunque sia la coppia de' punti corrispondenti A, A'.

a) Indicata con k la costante $JO \,.\, I'O$, avremo dunque

$$I'A' = \frac{k}{JA}, \qquad I'B' = \frac{k}{JB},$$

e sottraendo

$$I'B' - I'A' = \frac{k(JA - JB)}{JA \,.\, JB},$$

ma

$$I'B' - I'A' = A'B', \; JA - JB = -AB,$$

dunque

$$A'B' = \frac{-k}{JA \,.\, JB} \,.\, AB.$$

b) Se si considerano quattro punti $ABCD$ (fig. 31ª) di u e le quattro projezioni $A'B'C'D'$, avremo analogamente

$$A'C' = \frac{-k}{JA \,.\, JC} \,.\, AC,$$

$$B'C' = \frac{-k}{JB \,.\, JC} \,.\, BC,$$

$$A'D' = \frac{-k}{JA \,.\, JD} \,.\, AD,$$

$$B'D' = \frac{-k}{JB \,.\, JD} \,.\, BD,$$

e dividendo

$$\frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}.$$

c) Se invece $ABCD$, $A'B'C'D'$ sono sezioni fatte con due trasversali s, s' (non situate in uno stesso piano) a quattro piani $\alpha\beta\gamma\delta$ passanti per una stessa retta u, cioè se $A'B'C'D'$ è una projezione di $ABCD$, fatta dall'asse u (N° 4), si avrà ancora l'uguaglianza che ora si è dimostrata pel caso della projezione dal centro O.

Infatti, seghinsi i quattro piani $\alpha\beta\gamma\delta$ in $A''B''C''D''$ con una retta s'' che incontri tanto s quanto s'. Le rette AA'', BB'', CC'', DD''

sono le intersezioni dei piani $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ col piano ss'', epperò concorrono nel punto S in cui quest'ultimo piano sega l'asse u. Analogamente $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$, $D'D''$ sono quattro rette situate nel piano $s's''$ e concorrenti in un punto S' dell'asse u. Dunque: $A''B''C''D''$ è una projezione di $ABCD$ dal centro S, ed è una projezione di $A'B'C'D'$ del centro S'; onde si avrà

$$\frac{A''C''}{B''C''} : \frac{A''D''}{B''D''} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} .$$

d) Il numero

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

dicesi rapporto anarmonico o doppio-rapporto dei quattro punti (in linea retta) $ABCD$. Il risultato ottenuto esprime adunque il teorema:

Il rapporto anarmonico di quattro punti in linea retta non è alterato da qualsivoglia projezione [1].

Ossia:

Due gruppi projettivi di quattro punti $ABCD, A'B'C'D'$ (rispettivamente situati in linea retta) hanno rapporti anarmonici uguali.

e) Il quoziente delle espressioni di $A'C'$, $B'C'$ (*b*) dà

$$\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{AC}{BC} : \frac{AJ}{BJ} ,$$

nella quale eguaglianza il 2° membro è il rapporto anarmonico de' quattro punti $ABCJ$; dunque il 1° membro sarà il rapporto anarmonico di $A'B'C'J'$. Ossia: il rapporto anarmonico di quattro punti $A'B'C'J'$, l'ultimo de' quali sia all'infinito, non è altra cosa che il rapporto semplice $A'C' : B'C'$.

Analogamente si ha

$$\frac{B'D'}{A'D'} = \frac{AJ}{BJ} : \frac{AD}{BD} ,$$

[1] Pappo, *Mathematicæ Collectiones* (edizione di Commandino, Venetiis 1589), lib. VII, 129. Cfr. Baltzer, *Trigon.*, pag. 139.

cioè il rapporto anarmonico di quattro punti $A'B'J'D'$, il terzo de' quali è all'infinito, è uguale al rapporto semplice $B'D' : A'D'$.

f) Di qui si trae la soluzione del problema:

Dati tre punti ABC (in linea retta), determinare un quarto punto D, in modo che il rapporto anarmonico della forma $ABCD$ sia un numero λ dato in grandezza ed in segno (fig. 32ª).

Soluzione. — Per C si conduca una trasversale ad arbitrio, e su di essa a partire da C prendansi due segmenti CA', CB', il cui rapporto $CA' : CB'$ sia uguale al valore $\lambda : 1$ del dato rapporto anarmonico; e i due segmenti medesimi CA', CB' siano diretti nello stesso senso o in senso contrario, secondo che λ è positivo o negativo. Tirinsi le rette AA', BB', che si seghino in S; la parallela ad $A'B'$ condotta per S incontrerà AB nel punto richiesto D (1).

Infatti, detto D' il punto all'infinito di $A'B'$, essendo $ABCD$ una projezione di $A'B'C'D'$ dal centro S, il rapporto anarmonico di $ABCD$ sarà uguale a quello di $A'B'C'D'$, ossia ad

$$A'C' : B'C' = \lambda.$$

g) Questa è la soluzione grafica dell'equazione

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \lambda,$$

cioè

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} : \lambda = \mu,$$

che è quanto dire, del problema: trovare il punto D che con due punti dati A e B determina due segmenti AD, BD (in linea retta), il cui rapporto sia un numero μ dato in grandezza ed in segno.

Il problema proposto ammette pertanto una ed una sola soluzione. Laonde non vi possono essere due punti diversi D, D_1 tali che $ABCD$, $ABCD_1$ abbiano uguali rapporti anarmonici: i raggi SD, SD_1, dovendo essere ambedue paralleli ad $A'B'$, coincideranno. Ossia:

Se i gruppi $ABCD$, $ABCD_1$ hanno uguali rapporti anarmonici, il punto D_1 coincide necessariamente col punto D.

(1) Chasles, *Géométrie supérieure* (Paris 1852), p. 10.

h) Se due gruppi di quattro punti $ABCD$, $A'B'C'D'$ (rispettivamente in linea retta) hanno uguali rapporti anarmonici, essi sono forme projettive.

Infatti (N° 37) si può sempre con un numero limitato di projezioni e sezioni passare dalla forma ABC alla forma $A'B'C'$; sia D'' il punto che nasce da D in virtù di quelle operazioni. Allora il rapporto anarmonico di $A'B'C'D''$ sarà uguale a quello di $ABCD$, epperò saranno uguali i rapporti anarmonici di $A'B'C'D'$ e $A'B'C'D''$. Dunque D'' coincide con D'; ossia i gruppi $ABCD$, $A'B'C'D'$ sono projettivi.

In altre parole: la condizione necessaria e sufficiente affinchè due forme $ABCD$, $A'B'C'D'$ (composte ciascuna di quattro punti in linea retta) siano projettive, è l'uguaglianza (in grandezza e segno) de' loro rapporti anarmonici.

k) Il rapporto anarmonico di quattro punti $ABCD$ si indica col simbolo $(ABCD)$ [1]; laonde la projettività delle due forme $ABCD$, $A'B'C'D'$ si esprimerà coll'equazione

$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

Se due fasci di quattro raggi o di quattro piani sono rispettivamente segati da due trasversali in $ABCD$, $A'B'C'D'$, l'uguaglianza

$$(ABCD) = (A'B'C'D')$$

sarà la condizione necessaria e sufficiente affinchè i due fasci siano projettivi.

Conveniamo di denominare **rapporto anarmonico** di quattro raggi *abcd* o di quattro piani $\alpha\beta\gamma\delta$, appartenenti ad un fascio, il rapporto anarmonico de' quattro punti ne' quali i quattro elementi del fascio sono incontrati da una trasversale arbitraria, e di rappresentarlo con $(abcd)$, $(\alpha\beta\gamma\delta)$. Potremo allora enunciare il teorema generale:

La condizione necessaria e sufficiente perchè siano projettive due forme di 1ª specie costituite ciascuna da quattro elementi è l'uguaglianza de' loro rapporti anarmonici.

[1] Möbius, *Der barycentrische Calcul* (Leipzig 1827), p. 246.

54. Siccome due forme armoniche sono sempre projettive (N° 43), così dal teorema che precede si può già dedurre che il rapporto anarmonico di quattro elementi armonici è un numero costante. Infatti, se $ABCD$ è una forma armonica, è armonica anche la forma $BACD$ (N° 45), epperò le due forme $ACBD$, $BCAD$ sono projettive, ossia

$$(ACBD) = (BCAD),$$

che è quanto dire

$$\frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD} = \frac{BA}{CA} : \frac{BD}{CD},$$

e di qui

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = -1,$$

ossia

$$(ABCD) = -1.$$

Dunque, il rapporto anarmonico di quattro elementi armonici è l'unità negativa [1].

55. Alla equazione $(ABCD) = -1$, ossia

$$\frac{AC}{BC} + \frac{AD}{BD} = 0, \tag{1}$$

esprimente che i quattro punti $ABCD$ sono armonici, si possono dare altre forme, degne d'essere notate.

a) Siccome $AD = CD - CA$, $BD = CD - CB$, la (1) dà

$$CA\ (CD - CB) + CB\ (CD - CA) = 0,$$

ossia

$$\frac{1}{CD} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{CA} + \frac{1}{CB}\right), \tag{2}$$

formola che dà il punto D, quando sono dati A, B, C.

b) Sia O il punto di mezzo del segmento CD, ossia $OD = CO = -OC$, epperò

$$AC = OC - OA,\ AD = OD - OA = -(OC + OA),$$
$$BC = OC - OB,\ BD = -(OC + OB).$$

La (1), ossia

$$\frac{AC}{AD} + \frac{BC}{BD} = 0$$

[1] Möbius, *l. c.*, p. 269.

diverrà

$$\frac{OC - OA}{OC + OA} = \frac{OB - OC}{OB + OC},$$

ossia

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OC},$$

donde

$$\overline{OC}^2 = OA \,.\, OB, \qquad (3)$$

vale a dire: la metà del segmento CD è media proporzionale fra le distanze che i punti A, B hanno dal punto medio di CD.

L'equazione (3) mostra che i segmenti OA, OB hanno lo stesso segno, cioè il punto O non cade mai fra A e B.

c) Di qui risulta che, se per A, B si descrive un circolo (fig. 33ª), sarà OC la lunghezza della tangente ad esso condotta dal punto O [1].

Dunque il circolo di diametro CD taglierà ortogonalmente il primo circolo (ossia tutt'i circoli per A, B). E viceversa, se due circoli si incontrano ad angolo retto, essi segheranno in quattro punti armonici qualunque retta passante pel centro dell'uno o dell'altro [2].

d) La stessa formola (3) serve a risolvere il problema:

Date due coppie di punti AB, $A'B'$, trovare un'altra coppia CD in modo che entrambi i gruppi $ABCD$, $A'B'CD$ (fig. 34ª, 35ª) siano armonici.

Preso ad arbitrio un punto G fuori della retta, descrivansi i circoli GAB, $GA'B'$, i quali si segheranno in un secondo punto H. Sia O il punto nel quale la retta data è incontrata dalla congiungente GH [3]. Allora avremo nel primo circolo [4]

$$OA \,.\, OB = OG \,.\, OH,$$

e nel secondo

$$OA' \,.\, OB' = OG \,.\, OH,$$

epperò

$$OA \,.\, OB = OA' \,.\, OB'.$$

Dunque O è il punto medio del segmento cercato; e i punti C, D saranno le intersezioni della retta data col cerchio descritto dal centro O con un raggio uguale alla lunghezza comune delle tangenti condotte da O ai primi due circoli.

Il problema ammette soluzione reale ogniqualvolta il punto O riesca esterno ai due segmenti AB, $A'B'$, epperò ai due circoli suddetti (fig. 34ª e 35ª).

[1] BALTZER, *Planim.*, p. 128. [2] BALTZER, *Trigon.*, p. 146.
[3] GH è l'asse radicale de' due circoli. BALTZER, *Planim.*, p. 178 e seg.
[4] BALTZER, *Planim.*, p. 128.

Non esiste soluzione reale quando la coppia AB è separata mediante la coppia $A'B'$ (fig. 36ª); giacchè precisamente in questo caso, il punto O riesce interno ai due segmenti.

e) De' quattro punti armonici $ABCD$ suppongansi A e B infinitamente vicini o addirittura coincidenti. Se C è a distanza infinita, D coinciderà con A e B, perchè dev'essere il punto medio del segmento AB (Nº 51). Se C è a distanza finita, distinto da A e B, ma del resto arbitrario, l'equazione (2) dà $CD = CA = CB$, cioè D coincide coi punti A e B.

De' quattro punti armonici $ABCD$ suppongansi ora coincidenti A e C; e sia B all'infinito. Dovendo allora A essere il punto medio del segmento CD, il punto D coinciderà con A e C. Se invece B è a distanza finita, distinto da A e C, ma del resto arbitrario, l'equazione (1) dà $AD = 0$, vale a dire, il punto D coincide con A e C.

Dunque, se di quattro punti armonici due coincidono, coincide con essi anche uno degli altri due; ed il quarto rimane affatto indeterminato.

56. Teorema. — Una forma qualunque (di 1ª specie) costituita da quattro elementi $ABCD$ è projettiva alla forma che si deduce da quella scambiando fra loro due elementi, e fra loro anche gli altri due; per esempio alla forma $BADC$.

Dim. — Infatti, siano $ABCD$ quattro punti (fig. 37ª), ed $EFGD$ una projezione dei medesimi, fatta da un centro M sopra una retta passante per D. Se N è l'intersezione di AF con CM, sarà $MNGC$ una projezione di $EFGD$ fatta dal centro A, e sarà $BADC$ una projezione di $MNGC$ fatta dal centro F. Per conseguenza (Nº 35) la forma $BADC$ è projettiva ad $ABCD$. Nello stesso modo si dimostra che $ABCD$ è projettiva a ciascuna delle forme $CDAB$, $DCBA$ (1).

Di qui segue per esempio che, se il fascio *abcd* di quattro raggi è projettivo ad $ABCD$, è projettivo anche a $BADC$, $CDAB$, $DCBA$.

Cioè, se due forme di quattro elementi sono projettive, la corrispondenza fra gli elementi può essere stabilita in quattro maniere diverse.

57. Il teorema che precede torna a dire che, dati quattro elementi $ABCD$ di una forma di 1ª specie, sono uguali i rapporti anarmonici

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).$$

(1) Staudt, *l. c.*, p. 59.

a) Quattro elementi (di una forma di 1ª specie) possono essere ordinati in 24 maniere diverse, ossia formano i 24 gruppi

ABCD,	*BADC*,	*CDAB*,	*DCBA*,
ABDC,	*BACD*,	*DCAB*,	*CDBA*,
ACBD,	*CADB*,	*BDAC*,	*DBCA*,
ACDB,	*CABD*,	*DBAC*,	*BDCA*,
ADBC,	*DACB*,	*BCAD*,	*CBDA*,
ADCB,	*DABC*,	*CBAD*,	*BCDA*,

che qui abbiamo distribuiti in sei linee. I quattro gruppi di ciascuna linea sono projettivi fra loro (N° 56), epperò hanno lo stesso rapporto anarmonico. Se si vogliono determinare i rapporti anarmonici dei 24 gruppi, basta adunque considerare un solo gruppo per ciascuna linea, per esempio i sei gruppi della prima colonna. I sei rapporti anarmonici hanno fra loro tali relazioni che, conoscendo uno qualunque di essi, si determinano immediatamente gli altri cinque.

b) Consideriamo i due gruppi *ABCD*, *ABDC*, che differiscono fra loro per lo scambio degli ultimi due elementi. I rapporti anarmonici

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}, \quad (ABDC) = \frac{AD}{BD} : \frac{AC}{BC}$$

sono quantità inverse, epperò

$$(ABCD) \, . \, (ABDC) = 1, \tag{1}$$

ed analogamente

$$(ACBD) \, . \, (ACDB) = 1, \tag{1'}$$

$$(ADBC) \, . \, (ADCB) = 1. \tag{1''}$$

c) Essendo poi i quattro punti *ABCD* in linea retta, si ha identicamente

$$BC \, . \, AD + CA \, . \, BD + AB \, . \, CD = 0 \ (^1)$$

donde, dividendo per $BC \, . \, AD$, si cava

$$\frac{AC \, . \, BD}{BC \, . \, AD} + \frac{AB \, . \, CD}{CB \, . \, AD} = 1,$$

ossia

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} + \frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD} = 1,$$

(1) Infatti l'identità $BC + CA + AB = 0$, moltiplicata per AD, e avuto riguardo che $AD = BD + AB$ ed anche $AD = CD - CA$, dà

$$BC \, . \, AD + CA \, (BD + AB) + AB \, (CD - CA) = 0,$$

ossia, riducendo

$$BC \, . \, AD + CA \, . \, BD + AB \, . \, CD = 0.$$

che è quanto dire (N° 53, h)

$$(ABCD)+(ACBD)=1. \qquad (2)$$

Analogamente sarà

$$(ABDC)+(ADBC)=1, \qquad (2)'$$

$$(ACDB)+(ADCB)=1. \qquad (2)''$$

d) Dunque, se indichiamo con λ il rapporto anarmonico del gruppo $ABCD$, cioè se poniamo

$$(ABCD)=\lambda,$$

sarà, per la (1)

$$(ABDC)=\frac{1}{\lambda},$$

e per la (2)

$$(ACBD)=1-\lambda.$$

Quindi per la (1)'

$$(ACDB)=\frac{1}{1-\lambda},$$

e di qui per la (2)''

$$(ADCB)=1-\frac{1}{1-\lambda}=\frac{\lambda}{\lambda-1};$$

e poi, per la (1)'' o per la (2)':

$$(ADBC)=\frac{\lambda-1}{\lambda} \text{ (1)}.$$

e) Se nel gruppo $ABCD$ due punti, per esempio A e B, coincidono, si ha $AC=BC$, $AD=BD$, epperò $(ABCD)=(AACD)=1$. Ma se $\lambda=1$, gli altri rapporti anarmonici divengono $(ACAD)=0$, $(ACDA)=\infty$; vale a dire: $1, 0, \infty$ sono i valori che assume il rapporto anarmonico di quattro elementi, due de' quali coincidano.

f) Se $(ABCD)=-1$, sarà per le formole precedenti $(ACBD)=2$ e $(ACDB)=\frac{1}{2}$; onde (N° 54), se il rapporto anarmonico di quattro punti ha il valore 2 o $\frac{1}{2}$, questi punti, presi in un altro ordine, formano un gruppo armonico.

58. Dal teorema 53, h) esprimente la condizione necessaria e sufficiente per la projettività di due gruppi di quattro elementi, si conclude subito che:

(1) Möbius, *l. c.*, p. 249.

Se due forme (di 1ª specie) sono projettive, quattro elementi qualisivogliano dell'una e i quattro elementi corrispondenti dell'altra hanno uguali rapporti anarmonici (¹).
In particolare, a quattro elementi armonici dell'una corrisponderanno quattro elementi armonici dell'altra (N° 43).

59. Siano AA', BB' due coppie qualunque di punti corrispondenti di due punteggiate projettive (fig. 38ª); e I, J' i loro punti all'infinito. Allora avremo l'uguaglianza de' rapporti anarmonici

$$(ABIJ) = (A'B'I'J'),$$

ossia

$$(BAJI) = (A'B'I'J'),$$

ossia, perchè I, J' sono all'infinito (N° 53, *e*),

$$BJ : AJ = A'I' : B'I',$$

donde si ha

$$JA \, . \, I'A' = JB \, . \, I'B',$$

vale a dire: il prodotto $JA \, . \, I'A'$ ha un valore costante, qualunque sia la coppia AA' di punti corrispondenti (²).

Cfr. il N° 53, dove questo teorema è dimostrato per due punteggiate prospettive.

§ 10. Costruzioni di forme projettive.

60. Se ABC, $A'B'C'$ sono due terne d'elementi corrispondenti in due forme projettive (fig. 39ª), qualunque sistema di operazioni (projezioni e sezioni) per le quali da ABC si ottengano $A'B'C'$ (N° 37), condurrà eziandio da un altro elemento qualunque D della prima forma al corrispondente elemento D' dell'altra. Infatti, se da D potesse nascere in virtù di quelle operazioni un altro elemento D'', sarebbero uguali i rapporti anarmonici $(ABCD)$, $(A'B'C'D'')$; ma per ipotesi si ha $(ABCD) = (A'B'C'D')$; dunque sarebbe $(A'B'C'D') = (A'B'C'D'')$, il che è assurdo se D'' non coincide con D' (N° 53, *g*).

Nella fig. 39ª le operazioni sono: una projezione da S, una sezione con u'', una projezione da S' ed una sezione con u'.

(¹) STEINER, *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander* (Berlin 1832), p. 33.
(²) STEINER, *l. c.*, p. 40.

61. È facile del pari dimostrare il teorema inverso di quello del N° 58; ossia:

Date due forme di 1ª specie, se agli elementi $ABCD$.... dell'una corrispondono ordinatamente gli elementi $A'B'C'D'$.... dell'altra, in modo che quattro elementi qualisivogliano della prima e i quattro elementi corrispondenti dell'altra abbiano rapporti anarmonici uguali, le due forme sono projettive.

Infatti, ogni sistema di operazioni il quale conduca dalla terna ABC alla terna $A'B'C'$, condurrà dall'elemento D ad un tale elemento D'', pel quale si abbia l'uguaglianza de' rapporti anarmonici $(ABCD) = (A'B'C'D'')$. Ma per ipotesi è $(ABCD) = (A'B'C'D')$; dunque $(A'B'C'D') = (A'B'C'D'')$, epperò D'' coincide con D' (N° 53, g). Siccome la stessa conclusione vale per qualsivoglia altra coppia d'elementi corrispondenti, così rimane dimostrato che le due forme sono projettive (N° 34).

62. Dal N° 60 si ricava, come caso particolare, che se in due forme projettive (di 1ª specie) vi sono due terne corrispondenti ABC, $A'B'C'$, le quali siano prospettive, anche le forme date saranno prospettive.

a) Per esempio, se le forme sono due punteggiate $ABCD$..., $A'B'C'D'$..., l'ipotesi fatta equivale a supporre che le rette AA', BB', CC', concorrano in un punto O; dunque anche le altre rette analoghe DD',... passeranno per O (fig. 17ª e 31ª).

Come caso particolare, i punti A, A' coincidano (fig. 20ª), formando un punto unito [1]. Le terne ABC, $A'B'C'$ sono prospettive, e il loro centro di projezione è il punto comune alle BB', CC'; dunque:

Se due punteggiate projettive hanno un punto unito, esse sono prospettive.

Viceversa, è evidente che due punteggiate prospettive hanno sempre un punto unito.

b) Se le forme sono due fasci di raggi $abcd$..., $a'b'c'd'$... in uno stesso piano, l'ipotesi equivale a supporre che i tre punti aa', bb', cc' siano in una retta s; dunque anche tutti gli altri punti analoghi dd',... cadranno nella medesima retta (fig. 18ª).

[1] In due forme projettive, diciamo elemento unito un elemento che coincida col suo corrispondente.

Se la retta s è tutta all'infinito, si ottiene la seguente proprietà:

Se due fasci projettivi di raggi hanno tre coppie di raggi corrispondenti paralleli, due altri raggi corrispondenti qualisivogliano saranno pure paralleli.

L'ipotesi è verificata se i raggi aa' coincidono in un raggio unito (fig. 40ª); allora la retta s è quella che unisce i punti bb', cc'.

Dunque: se due fasci projettivi (in un piano) hanno un raggio unito, essi sono prospettivi.

E viceversa due fasci prospettivi di raggi (in un piano) hanno sempre un raggio unito.

c) Se l'una forma è una punteggiata $ABCD$.... e l'altra un fascio di raggi $abcd$.... (fig. 24ª), l'ipotesi equivale a supporre che i raggi abc passino rispettivamente per A, B, C; dunque anche d passerà per D, ..., ecc.

63. Due punteggiate possono trovarsi in una medesima retta, vale a dire, essere sovrapposte: per esempio, se due fasci di raggi (in uno stesso piano) $S \equiv abc$ ...., $O \equiv a'b'c'$ .... (fig. 41ª) vengono segati da una medesima trasversale, questa conterrà le due punteggiate ABC ...., $A'B'C'$ ...., che saranno projettive, se tali erano i due fasci. In tal caso, si può domandare se vi siano punti uniti, cioè se in qualche punto della trasversale coincidano due punti corrispondenti delle due punteggiate.

Per esempio (fig. 41ª), se la trasversale s si conduce pel punto aa' e pel punto bb', i punti AA' coincidono, e così pure BB'; cioè si hanno due punti uniti. Se una punteggiata u (fig. 42ª) si projetta da due centri S, O (posti in uno stesso piano con u), sicchè ne risultino i due fasci abc ...., $a'b'c'$ ...., e se si tira poi una trasversale s pel punto ove il raggio unito aa' è incontrato da u, si ottengono le due punteggiate projettive sovrapposte ABC ...., $A'B'C'$ ...., che hanno un solo punto unito AA'. In seguito (Nº 82) vedremo che due punteggiate projettive sovrapposte possono anche mancare affatto di punti uniti.

Analogamente due fasci di raggi possono essere concentrici, come avverrebbe se due punteggiate distinte venissero projettate da uno stesso centro (fig. 43ª); due fasci di piani possono essere coassiali, quali risultano se due punteggiate si projettano da uno stesso asse, ecc. Segando due stelle con uno stesso piano, si ottengono due piani punteggiati sovrapposti; projettando due piani

punteggiati da uno stesso centro, si ottengono due stelle concentriche. In tutti questi casi, le due forme di cui si tratta diconsi sovrapposte; e se sono projettive, ha importanza la ricerca degli elementi uniti.

64. Teorema. — Due forme (di 1ª specie) projettive sovrapposte o hanno al più due elementi uniti, o hanno tutti gli elementi uniti.

Dim. — Infatti, se vi fossero tre elementi uniti *ABC*, detti *D* e *D'* due altri elementi corrispondenti qualisivogliano, si avrebbe (N° 58) l'uguaglianza $(ABCD) = (ABCD')$, epperò *D'* coinciderebbe con *D* (N° 53, *g*).

Dunque, se le due forme non sono identiche fra loro, esse non potranno mai avere più di due elementi uniti.

65. Se una forma (di 1ª specie) costituita da quattro elementi *ABCD* è projettiva alla forma che si deduce da quella collo scambio di due elementi, per esempio a *BACD*, dico che la forma è armonica, e che i due elementi scambiati sono conjugati. Questo teorema è già contenuto nel N° 54; ma si può ora darne anche la seguente dimostrazione grafica.

Supposto per esempio che *ABCD* siano quattro punti in linea retta (fig. 44ª), sia *KMQD* una projezione dei medesimi, fatta da un centro qualunque *L* sopra una retta passante per *D*. Siccome *ABCD* è projettivo sì a *KMQD*, sì a *BACD*, così anche le forme *KMQD*, *BACD* saranno projettive. E siccome *D* è per esse un punto unito, così le due forme saranno prospettive (N° 62, *a*), cioè le rette *KB*, *MA*, *QC* concorreranno in uno stesso punto *N*. Da ciò segue che *KLMN* è un quadrangolo completo del quale due lati opposti concorrono in *A*, due altri lati opposti concorrono in *B*, mentre il quinto e il sesto lato passano rispettivamente per *C*, *D*. Dunque (N° 38) *ABCD* sono quattro punti armonici.

66. Siccome il passaggio fra due forme projettive (di 1ª specie) può sempre essere effettuato (N° 60) mediante il sistema d'operazioni che servono per dedurre tre elementi dell'una dagli elementi corrispondenti dell'altra, e siccome (N° 37) due dati gruppi di tre elementi sono sempre projettivi, cioè si può sempre passare dall'uno all'altro mediante alcune projezioni o sezioni, così noi possiamo concludere:

Date ad arbitrio tre coppie d'elementi corrispondenti

di due forme projettive, si possono costruire quante altre coppie si vogliono d'elementi corrispondenti (1).

Adduciamo due esempi; quello di due punteggiate, e quello di due fasci di raggi: intendendo, sì nell'un caso sì nell'altro, che le due forme siano in uno stesso piano.

Siano (fig. 39ª) A ed A', B e B', C e C' le tre coppie date di punti corrispondenti delle punteggiate projettive u, u' da costruirsi. Operiamo come s'è fatto al N° 37; cioè sulla retta che unisce due punti corrispondenti, per es. AA', prendansi ad arbitrio due punti S, S'; e si conducano le SB, $S'B'$ che si segano in B'', e le SC, $S'C'$ che si segano in C''. Sia poi A'' il punto in cui AA' incontra $B''C''$. Le operazioni che servono per passare da ABC ad $A'B'C'$ sono: 1° la projezione da S; 2° la sezione colla $u'' \equiv A''B''C''$; 3° la projezione da S'; 4° la sezione con u'. Dunque le stesse operazioni condurranno da un altro punto qualunque D di u al punto corrispondente D' di u'; ossia i raggi SD, $S'D'$ si devono segare in un punto D'' della retta fissa u''.

Per tal modo si ottiene una punteggiata $u'' \equiv A''B''C''D''$ .... che è prospettiva tanto ad u, quanto ad u'.

Siano (fig. 45ª) a ed a', b e b', c e c' le tre coppie date di raggi corrispondenti de' due fasci projettivi U, U' da costruirsi. Pel punto comune a due raggi corrispondenti, per es. aa', conducansi ad arbitrio due trasversali s, s'; e sia b'' la retta che unisce i punti sb, $s'b'$; c'' la retta che unisce i punti sc, $s'c'$; ed a'' la retta che unisce i punti aa' e $b''c''$. Le operazioni che servono per passare da abc ad $a'b'c'$ sono: 1° la sezione con s; 2° la projezione dal punto U'' comune alle $a''b''c''$; 3° la sezione colla s'; 4° la projezione da U'. Dunque le stesse operazioni condurranno da un altro raggio qualunque d del fascio U al corrispondente raggio d' del fascio U'; ossia i punti sd, $s'd'$ devono trovarsi sopra una retta d'' passante pel punto fisso U''.

Per tal modo si ottiene un fascio $U'' \equiv a''b''c''d''$ .... che è prospettivo tanto ad U, quanto ad U'.

a) Il raggio passante per S (fig. 39ª) e parallelo ad u seghi u'' in I''; il raggio $S'I''$ segherà u' nel punto I', il cui corrispondente in u è all'infinito.

Analogamente, se il raggio passante per S' e parallello ad u' sega u'' in J'', il raggio SJ'' segherà u nel punto J, il cui corrispondente in u' è all'infinito.

b) Sia P (fig. 39ª) il punto in cui u è segata da u''; il punto P' sarà l'intersezione di u' col raggio $S'P$. Parimenti, se Q' è il punto in cui u' è incontrata da u'', il punto Q sarà quello ove u è segata dal raggio SQ'.

Dicasi p (fig. 45ª) il raggio UU''; il raggio corrispondente p' congiungerà U' col punto $s'p$. Così pure, se il raggio $U'U''$ s'indica con q', la congiungente di U col punto sq' sarà il raggio q.

(1) Steiner, *l. c.*, p. 35 e 91.

67. I centri S, S' devono essere allineati con due punti corrispondenti; del resto sono arbitrari. Per es., possiamo porre S in A', ed S' in A (fig. 47ª). Allora il raggio $S'P$ coincide con u, epperò P' diviene il punto comune ad u, u'. Così pure il raggio SQ' coincide con u', cioè anche Q cade nel punto uu'.

Vale a dire: se assumiamo i punti A', A invece de' centri S, S', la retta u'' incontrerà rispettivamente le u, u' in quei punti P, Q' che corrispondono al punto uu', considerato prima come un punto P' di u', poi come un punto Q di u.

Ma nella costruzione del N° precedente, la retta u'' era il luogo delle intersezioni de' raggi corrispondenti de' fasci prospettivi $S(ABCD...)$, $S'(A'B'C'D'...)$. Dunque la retta u'' attuale sarà analogamente la sezione comune de' fasci $A'(ABCD...)$, $A(A'B'C'D'...)$, cioè il luogo de' punti ove si segano le coppie di rette $A'B$ ed AB', $A'C$ ed AC', $A'D$ ed AD',....

Se invece de' punti A', A, adoperiamo come centri di projezione altri due punti come B' e B, o C' e C, ..., la retta u'' dovrà ancora segare le u, u' ne' punti P, Q'; cioè la retta u'' rimane la medesima. Dunque:

Se $ABC ... MN ..$, $A'B'C' ... M'N' ...$ sono due punteggiate projettive (in uno stesso piano), tutte le coppie di rette analoghe a MN', $M'N$ si segano in punti di una retta fissa, la quale passa pei punti delle due punteggiate che corrispondono al loro punto d'intersezione.

68. Questo teorema, limitato alle tre coppie di punti AA', BB', CC', le quali del resto sono affatto arbitrarie, può enunciarsi così:

Le trasversali s, s' devono passare pel punto comune a due raggi corrispondenti; del resto sono arbitrarie. Per es., possiamo assumere a' per s ed a per s' (fig. 46ª). Allora il punto $s'p$ coincide con U, epperò p' sarà la retta UU'. Parimenti, il punto sq' coincide con U', cioè anche q non è altro che la retta UU'.

Vale a dire: se assumiamo i raggi a', a invece delle trasversali s, s', il punto U'' sarà l'intersezione de' raggi p, q' che corrispondono alla UU', considerata prima come raggio p' del fascio U', poi come raggio q del fascio U.

Ma nella costruzione del N° precedente, il punto U'' era il centro di projezione per le punteggiate prospettive $s(abcd...)$, $s'(a'b'c'd'...)$. Dunque l'attuale punto U'' sarà analogamente il centro di projezione per le punteggiate $a'(abcd...)$, $a(a'b'c'd'...)$, cioè il punto comune alle rette che congiungono le coppie di punti $a'b$ ed ab', $a'c$ ed ac', $a'd$ ed ad', ecc.

Se invece de' raggi a', a, si adoperano come trasversali altri due raggi come b' e b, ovvero c' e c, ..., il punto U'' sarà ancora l'intersezione de' raggi p, q', cioè il punto U'' non cambia. Dunque:

Se $abc ... mn ..$, $a'b'c' ... m'n' ...$ sono due fasci projettivi di raggi (in uno stesso piano), le rette che uniscono le coppie di punti analoghe ad mn', $m'n$ passano tutte per un punto fisso, il quale è l'intersezione de' raggi che corrispondono alla congiungente de' centri de' due fasci.

Questo teorema, ristretto alle tre coppie di raggi aa', bb', cc', le quali del resto sono affatto arbitrarie, può enunciarsi così:

Se un esagono $AB'CA'BC'$ (fig. 48ª) ha i vertici d'ordine dispari in una retta u, e i vertici d'ordine pari in un'altra retta u', le tre coppie di lati opposti (AB' ed $A'B$, $B'C$ e BC', CA' e $C'A$) si segano in tre punti di una retta u'' (¹).

69. Se le due punteggiate u, u' sono prospettive (fig. 50ª), i punti P e Q' coincidono in un solo punto O comune alle due rette; allora $AA'BB'$ è un quadrangolo completo, i cui punti diagonali sono O, S (punto di concorso delle AA', BB', ...) ed M (intersezione delle AB', $A'B$); perciò (N° 49) le rette u, u' sono separate armonicamente mediante la u'' e la OS. Dunque:

Se due trasversali u, u' segano un fascio di raggi $a, b, c, \ldots$ ne' punti (A, A'), (B, B'), (C, C'), ... i punti ove si segano le coppie di rette AB' e $A'B$, AC' e $A'C$, BC' e $B'C$, ecc., cadranno in una retta fissa u'' passante pel punto uu'; e le u, u' saranno separate armonicamente mediante u'' e il centro del fascio.

a) Di qui si cava la soluzione del problema:

Condurre la retta che unisce un punto dato M col punto inaccessibile di concorso di due rette date u, u'.

Per M (fig. 50ª e 51ª) conducansi due rette a segare u in A, B ed u' in B', A'; dal punto S ove si segano AA' e BB' menisi un'altra retta ad incontrare u, u' in C, C'. Il punto N comune alle BC', $B'C$ apparterrà alla retta domandata u''.

Se un esagono $ab'ca'bc'$ (fig. 49ª) ha i lati d'ordine dispari concorrenti in un punto U, e i lati d'ordine pari concorrenti in un altro punto U', le rette congiungenti le tre coppie di vertici opposti (ab' ed $a'b$, $b'c$ e bc', ca' e $c'a$) passano per uno stesso punto U''.

Se i due fasci U, U' sono prospettivi (fig. 52ª), i raggi p e q' coincidono nella retta UU'; allora $aa'bb'$ è un quadrilatero completo, le cui diagonali sono UU', s (sezione comune de' due fasci) ed m (congiungente de' punti ab', $a'b$); perciò (N° 48) i punti U, U' sono divisi armonicamente mediante il punto U'' e la retta s. Dunque:

Se una punteggiata è projettata da due punti U, U' mediante i raggi (a, a'), (b, b'), (c, c'), ... le rette che uniscono le coppie di punti $(ab', a'b)$, $(ac', a'c)$, $(bc', b'c)$, ecc., concorrono in un punto fisso U'', il quale insieme con s divide armonicamente UU'.

Di qui si cava la soluzione del seguente problema:

Costruire il punto che giace in una retta tracciata m ed in un'altra retta non tracciata, ma individuata da due punti dati U, U'.

In m (fig. 52ª) prendansi due punti, i quali uniti ad U diano le rette a, b, e uniti ad U' le rette b', a', e sulla retta s che unisce i punti aa', bb' prendasi un terzo punto, che unito ad U, U' dia le rette c, c'. La retta n che unisce i punti bc', $b'c$ segherà m nel punto richiesto U''.

(¹) Pappo, *l. c.*, lib. VII, 139.

b) Se le u, u' sono parallele (fig. 51ª), la costruzione precedente risolve il problema:

Date due rette parallele, condurre coll'uso della sola riga per un punto dato la retta parallela alle date.

70. Tornando alla costruzione del N° 66 (a sinistra), prendasi come centro S il punto in cui AA' è segata da BB', e come centro S' il punto comune alle AA', CC' (fig. 53ª). Allora la retta u'' non sarà altro che la $B'C$, perchè in B' si segano i raggi SB, $S'B'$, ed in C i raggi SC, $S'C'$. Perciò si costruirà un'altra coppia qualunque di punti corrispondenti D, D', osservando che le rette SD, $S'D'$ devono concorrere sulla $B'C$.

Considerando la figura $SS'CDD'B'$ che è un esagono, possiamo enunciare il teorema:

In un esagono, i cui lati siano due rette punteggiate projettive e le congiungenti di quattro coppie di punti corrispondenti, le tre rette che uniscono a due a due i vertici opposti concorrono in uno stesso punto.

71. Nella soluzione del problema del N° 66 (a sinistra) se le tre congiungenti AA', BB', CC' avessero un punto comune S (come caso particolare, se AA' coincidessero), nel qual caso le due punteggiate sarebbero prospettive, basterebbe tirare i raggi per S e si otterrebbero tutte le coppie di punti corrispondenti (fig. 17ª).

Tornando alla costruzione del N° 66 (a destra), prendasi come trasversale s la retta che unisce i punti aa', bb', e come trasversale s' la retta che unisce i punti aa', cc' (fig. 54ª). Allora il punto U'' sarà l'intersezione $b'c$, perchè b' congiunge i punti sb, $s'b'$, e c congiunge i punti sc, $s'c'$. Perciò si costruirà un'altra coppia qualsivoglia di raggi corrispondenti d, d', osservando che i punti sd, $s'd'$ devono essere in linea retta con $b'c$.

Considerando ora la figura $ss'cdd'b'$ che è un esagono, potremo enunciare il teorema:

In un esagono, i cui vertici siano i centri di due fasci projettivi e le intersezioni di quattro coppie di raggi corrispondenti, i tre punti in cui si segano a due a due le coppie di lati opposti sono in linea retta.

Se i tre punti aa', bb', cc' (N° 66, a destra) fossero in una stessa retta s (come caso particolare, se aa' coincidessero), nel qual caso i due fasci sarebbero prospettivi, basterebbe congiungere i centri de' due fasci a ciascun punto di s e si otterrebbero tutte le coppie di raggi corrispondenti (fig. 18ª).

72. Se le due punteggiate u, u' (N° 66, a sinistra) dovessero essere sovrapposte, cioè se i sei punti dati $AA'BB'CC'$ fossero in una stessa retta (fig. 55ª), si comincerebbe dal projettare u' da un centro arbitrario S' sopra una retta arbitraria u_1, e quindi si opererebbe sulle punteggiate $u \equiv (ABC\dots)$, $u_1 \equiv (A_1B_1C_1\dots)$, cioè sulle coppie di punti (A, A_1), (B, B_1), (C, C_1), nel modo insegnato di sopra (N° 66). Trovata una coppia di punti corrispondenti

(D, D_1) delle punteggiate u, u_1, il raggio $S'D_1$ determinerebbe in u' il punto D' corrispondente a D.

a) La costruzione sarebbe semplificata, se due punti corrispondenti A, A' coincidessero (fig. 56ª), giacchè allora, conducendo u_1 per A, la punteggiata u_1 riesce prospettiva ad u; ond'è che, projettata u' dal centro arbitrario S' su u_1, se le BB_1, CC_1 si segano in S, basterà projettare u da S su u_1, e quindi u_1 da S' su u'.

Le due punteggiate projettive sovrapposte u, u' hanno, oltre ad A od A', un altro punto unito, nell'intersezione della retta data col raggio SS'.

b) Dunque, se il raggio SS' passa pel punto uu_1, le due punteggiate projettive u, u' avranno un solo punto unito. Se si volessero costruire in una retta data due punteggiate projettive (sovrapposte), per le quali AA' fosse una coppia di punti corrispondenti ed M fosse l'unico punto unito (fig. 56ª *bis*), da un punto S' arbitrario si projetterebbe A' in A_1 sopra una retta u_1 condotta arbitrariamente per M; indi, costruito il punto S comune alle AA_1, $S'M$, per trovare il punto B' di u' corrispondente ad un punto B di u, si projetterebbe B da S in B_1, e quindi B_1 da S' in B'.

c) Se i due fasci U, U' (N° 66, a destra) debbono essere sovrapposti, cioè se i sei raggi dati $aa'bb'cc'$ passano per uno stesso punto, si comincerà dal segare $a'b'c'$ con una trasversale, indi si projetteranno i punti d'intersezione da un centro arbitrario U_1. Se i raggi projettanti sono $a_1b_1c_1$ ..., avremo a considerare i due fasci non sovrapposti U, U_1.

Ovvero, potremo segare abc con una trasversale in ABC, ed $a'b'c'$ con un'altra trasversale in $A'B'C'$; indi si opererà sulle punteggiate ABC ..., $A'B'C'$ ... nel modo che si è già esposto.

Omettiamo le figure corrispondenti a queste costruzioni, affinchè il giovane studioso cominci ad esercitarsi a farle da sè. Anche qui si avrebbe una notevole semplificazione, se fra i raggi dati ve ne fosse uno unito, cioè se per es. a ed a' coincidessero insieme, ecc.

§ 11. Casi particolari ed esercizi.

73. Due punteggiate diconsi simili, se ai punti ABC... dell'una corrispondono i punti $A'B'C'$ ... dell'altra, in modo che il rapporto di due segmenti corrispondenti AB e $A'B'$, AC e $A'C'$, ... sia un numero costante. Se questo numero è l'unità, le punteggiate diconsi uguali.

Due punteggiate simili sono projettive, perchè ogni rapporto anarmonico, come $(ABCD)$, sarà uguale al suo corrispondente $(A'B'C'D')$. Oppure: suppongansi le due rette in uno stesso piano (fig. 57ª), e dicasi P o Q il punto ad esse comune, secondo che

si considera come appartenente ad u' o ad u. Sia poi AA' una coppia qualunque di punti corrispondenti; P il punto di u che corrisponde a P'; e Q' il punto di u' che corrisponde a Q. Conducansi AA'' parallela ad u', e $A'A''$ parallela ad u. Nei triangoli PQQ', PAA'' gli angoli in Q, A sono uguali e racchiusi da lati proporzionali, in virtù dell'ipotesi

$$\frac{PQ}{P'Q'}=\frac{PA}{P'A'}=\frac{PA}{AA''}.$$

Segue di qui che i punti P, Q', A'' sono in linea retta; dunque, se la punteggiata ABC... si projetta su PQ' in $A''B''C''$... mediante rette parallele ad u', e quindi se si projetta la punteggiata $A''B''C''$... sulla u' mediante rette parallele ad u, si otterrà la punteggiata $A'B'C'$....

Se $PQ=P'Q'$, cioè se la retta PQ' fa angoli uguali colle rette date, le punteggiate u, u' sono uguali.

Al punto all'infinito di u corrisponde il punto all'infinito di u'.

74. Viceversa: se i punti all'infinito I, I' di due punteggiate projettive u, u' sono corrispondenti, le punteggiate sono simili. Infatti (fig. 57ª), se si projetta u da I', ed u' da I (come nel N° 67, a sinistra), si ottengono due fasci di raggi paralleli, ne' quali i raggi corrispondenti si segano sulla retta fissa u''. I segmenti $A''B''$ di u'' risultano allora proporzionali sì ai segmenti AB di u, sì ai segmenti $A'B'$ di u'; epperò i segmenti AB di u sono proporzionali ai segmenti $A'B'$ di u'.

O altrimenti: se AA', BB', CC' sono tre coppie di punti corrispondenti, e se I, I' sono i punti all'infinito, avremo l'uguaglianza de' rapporti anarmonici (N° 58)

$$(ABCI)=(A'B'C'I'),$$

ossia, perchè I, I' sono all'infinito (N° 53, *e*),

$$\frac{AC}{BC}=\frac{A'C'}{B'C'},$$

equazione che esprime appunto la proporzionalità de' segmenti corrispondenti.

Esempi. — Segando un fascio di raggi (il cui centro sia a distanza finita) con due trasversali parallele, si hanno due punteggiate simili.

Due sezioni qualisivogliano di un fascio di raggi paralleli sono punteggiate simili.

In entrambi questi esempi, le punteggiate sono anche prospettive; il punto unito è a distanza infinita nel primo caso, a distanza finita (in generale) nel secondo.

75. Due fasci projettivi di raggi, i cui centri siano l'uno e l'altro all'infinito, diconsi simili, se una sezione dell'uno è simile ad una sezione dell'altro. Allora due altre sezioni qualisivogliano de' due fasci saranno pure simili fra loro.

76. Dall'eguaglianza de' rapporti anarmonici si deduce che due punteggiate uguali sono projettive (N° 61); e che viceversa due punteggiate projettive sono uguali (N° 53, g) tostochè siano uguali i segmenti corrispondenti compresi fra i punti di due terne ABC, $A'B'C'$ corrispondenti, cioè $A'B' = AB$, $A'C' = AC$ (epperò $B'C' = BC$).

Esempi. — Se un fascio di raggi paralleli è segato da due trasversali ugualmente inclinate ai raggi, si ottengono due punteggiate uguali.

Se un fascio di raggi (non paralleli) è segato da due trasversali parallele ed equidistanti dal centro del fascio, le due punteggiate che ne risultano sono uguali.

77. Due punteggiate simili sovrapposte, avendo già un punto unito N a distanza infinita, ne hanno un altro M, che in generale è a distanza finita. Se AA', BB' sono due coppie di punti corrispondenti, si avrà:

$$MA : MA' = AB : A'B' = \text{cost.}^{e},$$

onde basterà dividere il segmento AA' in due parti MA, MA' aventi fra loro un rapporto dato.

La frazione $MA : MA'$ è (N° 53, e) il rapporto anarmonico $(AA'MN)$. Se il suo valore è -1, il gruppo $AA'MN$ sarà armonico (N° 54), cioè M sarà (N° 51) il punto di mezzo di AA' e d'ogni altro segmento analogo BB', ...; vale a dire le due punteggiate sono costituite dalle coppie di punti equidistanti da un punto fisso M.

Ma se quel rapporto costante ha il valore $+1$, cioè se MA ed MA' devono essere uguali di grandezza e di segno, il punto M sarà all'infinito. Infatti, dall'essere $(AA'MN) = 1$ segue $(NMA'A) = 1$ (N° 56), epperò (N° 57, e) i punti M, N coincidono insieme.

Che due punteggiate projettive sovrapposte, dotate di un solo punto unito, posto a distanza infinita, siano uguali, ri-

sulta anche dalla costruzione del N° 72, *b* (fig. 56ª *bis*). Se il punto *M* va all'infinito, le rette SS', A_1B_1 divengono parallele alla retta data *u* od *u'* (fig. 56ª *ter*); e siccome i triangoli SA_1B_1, $S'A_1B_1$ hanno una base comune, parallela alla retta dei vertici, i segmenti intercetti da essi in qualunque parallela alla base saranno uguali; dunque $AB = A'B'$, ossia due segmenti corrispondenti sono uguali; epperò $AA' = BB'$, ecc., cioè il segmento fra due punti corrispondenti è costante. Le due punteggiate si possono dunque supporre generate da un segmento AA' dato di grandezza e senso, il quale scorra su di una retta data; il termine A descrive l'una punteggiata, il termine A' descrive l'altra.

Viceversa, è evidente che, se un segmento AA' dato di grandezza e senso scorre su di una retta data, i suoi termini A, A' descriveranno due punteggiate uguali, epperò projettive, dotate di un solo punto unito, che sarà a distanza infinita.

78. Due fasci di raggi diconsi uguali, se agli elementi dell'uno corrispondono ordinatamente gli elementi dell'altro, in modo che l'angolo di due elementi qualisivogliano della prima forma sia sempre uguale all'angolo degli elementi corrispondenti.

È evidente che due fasci uguali si possono segare con due trasversali in modo che le punteggiate risultanti siano uguali; ma due punteggiate uguali sono sempre projettive; dunque anche due fasci uguali sono sempre projettivi.

Viceversa, due fasci projettivi di raggi *abcd*...., *a'b'c'd'*.... saranno uguali quando tre raggi *abc* dell'uno e i tre corrispondenti raggi *a'b'c'* dell'altro costituiscano due figure uguali: il che si dimostra ancora segando i due fasci con due trasversali, in modo che le sezioni *ABC*, *A'B'C'* dei gruppi *abc*, *a'b'c'* siano uguali. Le punteggiate projettive che ne risultano sono uguali (N° 76), epperò sono uguali anche gli altri angoli corrispondenti *ad* ed *a'd'*,.... de' fasci proposti.

79. Poichè due forme (due punteggiate o due fasci) uguali sono sempre projettive, così possiamo concludere che, se una punteggiata o un fascio vien trasportato nello spazio, senza che si alteri la scambievole giacitura de' suoi elementi, la punteggiata o il fascio nella sua nuova posizione sarà projettivo alla forma stessa nella posizione primitiva.

80. Dati in uno stesso piano due fasci uguali di raggi *abcd*..., *a'b'c'd'*..., se un raggio dell'un fascio ruota intorno al suo centro descrivendo il fascio medesimo, il raggio corrispondente descriverà

l'altro fascio con una rotazione dello stesso senso o di senso opposto. Nel primo caso i due fasci diconsi direttamente uguali, nel secondo inversamente uguali.

a) Nel primo caso, è evidente che gli angoli aa', bb', cc',... sono tutti uguali (in grandezza e in senso). Perciò due raggi corrispondenti o saranno sempre paralleli o non lo saranno mai.

b) Nel secondo caso, due angoli corrispondenti ab, $a'b'$ sono uguali in grandezza, ma di senso opposto. Perciò, se si trasporta l'un fascio parallelamente a sè stesso, sinchè i due centri coincidano, le bissettrici degli angoli di due raggi corrispondenti a, a' saranno evidentemente i raggi uniti de' due fasci sovrapposti, che sono ancora projettivi (N° 79); donde segue che questi raggi saranno anche le bissettrici degli angoli di qualunque altro pajo di raggi corrispondenti. Perciò, se i due fasci si suppongono di nuovo non concentrici, essi hanno due coppie di raggi corrispondenti paralleli; e i due raggi in ciascun fascio sono fra loro perpendicolari, giacchè hanno le direzioni delle bissettrici degli angoli d'una coppia qualunque di raggi corrispondenti.

81. Se due fasci di raggi $abcd$..., $a'b'c'd'$... sono projettivi, e se sono uguali in grandezza e in senso gli angoli aa', bb', cc' di tre coppie di raggi corrispondenti, avrà la stessa grandezza e lo stesso senso anche l'angolo dd' di due altri raggi corrispondenti qualunque. Infatti, si trasporti il primo fascio parallelamente a sè stesso, finchè riesca concentrico al secondo; e poi si faccia girare lo stesso primo fascio intorno al centro comune, di un angolo uguale ad aa': allora i raggi a, b, c coincideranno rispettivamente coi raggi a', b', c',; e i due fasci, che non cessano d'essere projettivi (N° 79), avranno tre raggi uniti, e conseguentemente (N° 64) ogni altro raggio coinciderà del pari col suo corrispondente. Dunque, restituendo il primo fascio alla sua primitiva posizione, l'angolo dd' sarà uguale ad aa'.

82. Dall'essere uguali gli angoli aa', bb', cc',... in due fasci direttamente uguali consegue che due fasci direttamente uguali, i quali abbiano lo stesso centro O, si possono supporre generati dalla rotazione di un angolo aa' di grandezza invariabile intorno al suo vertice fisso O: l'un lato a genera l'un fascio, l'altro lato a' l'altro fascio.

Viceversa, se un angolo di grandezza invariabile gira intorno

al proprio vertice, i due lati generano due fasci (direttamente) uguali, epperò projettivi. È evidente che questi fasci projettivi non hanno alcun raggio unito.

Segando i due fasci con una trasversale, si otterranno in questa due punteggiate projettive sovrapposte, senza punti uniti.

Le cose esposte ai Ni 78-81 per due fasci di raggi contenuti in uno stesso piano si potrebbero ripetere senza mutazione alcuna per due fasci di piani nello spazio a tre dimensioni.

83. Due punteggiate projettive sovrapposte in una stessa retta, $ABC\ldots$, $A'B'C'\ldots$ vengano projettate da due centri diversi U', U', mediante i fasci $abc\ldots$, $a'b'c'\ldots$. Siano i, j' i raggi paralleli alla retta data, passanti rispettivamente per U, U'; ed i', j i raggi corrispondenti a quelli. I punti I', J, ne' quali gli ultimi due raggi segano la retta data saranno pertanto i punti che corrispondono al punto all'infinito (I o J') della retta data, secondo che questo si consideri come punto della punteggiata $ABC\ldots$, o come punto della punteggiata $A'B'C'\ldots$.

Per la projettività di due gruppi corrispondenti abbiamo (N° 59) un'egua-glianza di rapporti anarmonici, dalla quale si deduce

$$JA\,.\,I'A'=JB\,.\,I'B'=\text{cost.}^e \qquad (1)$$

cioè il prodotto $JA\,.\,I'A'$ è una quantità costante, qualunque sia la coppia AA'. Sia O il punto di mezzo del segmento JI', ed O' il punto che corrisponde ad O riguardato come punto della prima punteggiata. Siccome l'equazione (1) sussiste per ogni coppia di punti corrispondenti, epperò anche per OO', così avremo

$$JA\,.\,I'A'=JO\,.\,I'O', \qquad (2)$$

ossia
$$(OA-OJ)(OA'-OI')+OJ(OO'-OI')=0,$$

e siccome
$$OI'=-OJ,$$

così
$$OA\,.\,OA'-OI'(OA-OA'+OO')=0. \qquad (3)$$

a) Ora si domandi se vi sono punti uniti; detto E un punto siffatto, l'equazione precedente avrà luogo ponendo E in luogo di A ed A', onde

$$\overline{OE}^2=OI'\,.\,OO'. \qquad (4)$$

Di qui risulta che, se $OI'\,.\,OO'$ è positivo, cioè se O non si trova fra I' ed O', vi sono due punti uniti E, F, che hanno O per punto di mezzo e separano armonicamente i punti I', O' (N° 55, *b*).

Se O si trova fra I' ed O', non vi sono punti uniti.

Se O' coincide con O, vi è un solo punto unito, che è il punto O.

b) Imaginiamo le due punteggiate descritte ciascuna da un punto che corra sempre nello stesso senso [1]. Se l'una è percorsa nel senso ABC, l'altra sarà percorsa nel senso $A'B'C'$, i quali due sensi o sono uguali o sono opposti.

Se sono opposti i sensi ABC, $A'B'C'$, saranno tali anche IJA, $I'J'A'$; il segmento finito JA e il segmento infinito $I'A'$ hanno sensi opposti, cioè i segmenti finiti JA, $I'A'$ hanno lo stesso senso. In virtù della (1), anche JO, $I'O'$ hanno allora lo stesso senso; dunque O non cade fra I' ed O' (fig. 58ª, *a*), epperò vi sono due punti uniti. Siccome OE è media proporzionale fra OI', OO', così i punti uniti cadono fuori del segmento finito JI'.

Se i sensi ABC, $A'B'C'$ sono uguali, si arriva analogamente alla conseguenza che JA e $I'A'$, e così JO e $I'O'$ hanno sensi opposti. Allora vi saranno punti uniti, se O non è fra I', O', cioè se O' è fra O ed I' (fig. 58ª, *b*). Siccome OE è media proporzionale fra OI', OO', così i punti uniti cadono entro il segmento JI'.

c) Se vi sono due punti uniti E, F (fig. 59ª), conducasi per E una retta ad arbitrio, e da due punti S, S' presi in essa si projettino rispettivamente le due punteggiate. I due fasci sono prospettivi, a cagione del raggio unito SES'; perciò i raggi corrispondenti SA ed $S'A'$, SB ed $S'B'$, ... SF ed $S'F$ si segheranno in punti di una retta passante per F.

Sia E'' il punto in cui questa retta sega SS'; allora saranno $EFAA'$, $EFBB'$ le projezioni di $EE''SS'$ risp. dai centri A'', B''; dunque i gruppi $EFAA'$, $EFBB'$ sono projettivi; vale a dire il rapporto anarmonico del gruppo formato dai due punti uniti e da due punti corrispondenti qualunque è costante. Dunque:

Due forme projettive sovrapposte, dotate di due elementi uniti, sono costituite dalle coppie d'elementi che con due elementi fissi dànno un rapporto anarmonico costante [2].

d) Se non vi sono punti uniti, cioè se O si trova fra O' ed I' (fig. 60ª), si innalzi in O una perpendicolare OU alla retta data, di tale lunghezza che sia OU media proporzionale fra $I'O$ ed OO', cioè che l'angolo $I'UO'$ sia retto. Condotta inoltre per U la IUJ' parallela alla retta data, avremo l'angolo IUI' uguale all'angolo JUJ', e l'angolo OUO' uguale ad $OI'U$ epperò ad IUI'. Dunque ne' due fasci projettivi, che da U projettano le due punteggiate date, sono uguali gli angoli IUI', JUJ', OUO' di tre coppie di raggi corrispondenti; la stessa grandezza e lo stesso senso avranno pertanto (N° 81) gli angoli AUA', BUB', ... [3]. Concludiamo:

Due punteggiate projettive sovrapposte senza punti uniti si possono sempre considerare come generate dalle intersezioni

[1] Cfr. Steiner, *l. c.*, p. 61.

[2] La costruzione che precede risolve il problema: date due coppie di punti corrispondenti AA', BB' e un punto unito E, trovare l'altro punto unito.

[3] Chasles, *l. c.*, p. 119.

della retta data coi lati di un angolo di grandezza costante, il quale ruoti intorno al suo vertice fisso.

84. Si è veduto (N° 66) come si risolva in generale il problema: date tre coppie di elementi corrispondenti di due forme (di 1ª specie) projettive, costruire quante altre coppie si vogliano, ossia costruire l'elemento di una forma che corrisponda ad un elemento dato dell'altra. Lo studioso potrà ora trattare per esercizio i seguenti casi particolari:

1° Le forme siano due punteggiate u, u' non sovrapposte; e le coppie d'elementi dati siano

a)	P e P',	Q e Q' (1),	A ed A';
b)	P e P',	A ed A',	B e B';
c)	I ed I',	J e J',	P e P';
d)	I ed I',	J e J',	A ed A';
e)	I ed I',	P e P',	Q e Q';
f)	I ed I',	P e P',	A ed A';
g)	I ed I',	A ed A',	B e B';

2° Se le punteggiate sono sovrapposte, risolvere i problemi *d*) e *g*).

3° Se le forme sono due fasci (di raggi) non concentrici, risolvere i problemi correlativi ad *a*) e *b*).

4° Uno de' fasci abbia il centro all'infinito.

5° Entrambi i fasci abbiano i centri all'infinito.

85. Si dimostri il seguente teorema:

Se i tre vertici A, A', A'' di un triangolo variabile scorrono su tre rette fisse u, u', u'' concorrenti in un punto, e se due lati $A'A''$, $A''A$ ruotano rispettivamente intorno a due punti fissi O, O', anche il terzo lato AA' passerà per un punto fisso O'', situato nella retta OO'.

Basterà mostrare che i punti A, A', A'' nel loro movimento descrivono tre punteggiate, che a due a due sono prospettive. Ovvero, si osserverà che a due posizioni del triangolo variabile si può applicare il teorema del N° 12.

Stabilito questo teorema, si deduce tosto il seguente corollario:

Se i vertici di un quadrangolo variabile $AA'A''A'''$ scorrono su quattro rette fisse, concorrenti in un punto O, mentre tre lati AA', $A'A''$, $A''A'''$ girano attorno a tre punti fissi C', B''', B', anche il quarto lato $A'''A$ e le diagonali AA'', $A'A'''$ passeranno per altri tre punti fissi C'', C'', B'', determinati dai primi. I sei punti fissi sono i vertici di un quadrilatero completo, vale a dire, essi sono a tre a tre allineati su quattro rette (fig. 61ª).

E nello stesso modo si deduce il corollario analogo, relativo ad un poligono di n vertici.

(1) $P, P', Q, Q', I, I', J, J'$ hanno i significati espressi al N° 66. $A, B, \ldots$ sono punti dati ad arbitrio.

86. Teorema. — Se ad un triangolo $U_1U_2U_3$ è circoscritto un altro triangolo $O_1O_2O_3$, esistono infiniti triangoli che sono inscritti nel primo e circoscritti al secondo (fig. 62ª).

Infatti, se projetto la punteggiata $U_2U_3\ldots$ da O_2 e da O_3, avrò i fasci prospettivi

$$O_2\,(U_1,\,U_2,\,U_3,\ldots),\;O_3\,(U_1\,,\,U_2,\,U_3,\ldots)\,;$$

e similmente, se da O_1 e da O_3 projetto la punteggiata $U_1U_3\ldots$, avrò i fasci prospettivi

$$O_1\,(U_1,\,U_2,\,U_3,\ldots),\;O_3\,(U_1,\,U_2,\,U_3,\ldots).$$

Dunque sono projettivi i fasci

$$O_1\,(U_1,\,U_2,\,U_3,\ldots),\;O_2\,(U_1,\,U_2,\,U_3,\ldots)\,;$$

ma i raggi O_1U_3, O_2U_3 coincidono, vale a dire, questi due fasci sono prospettivi, e la loro comune sezione è U_1U_2. Abbiamo dunque i tre fasci O_1, O_2, O_3 che presi a due a due sono prospettivi ed hanno per sezioni comuni

il primo ed il secondo la retta U_1U_2,
il secondo ed il terzo la retta U_2U_3,
il terzo ed il primo la retta U_3U_1.

Ciò significa che ogni terna di raggi corrispondenti formerà un triangolo circoscritto ad $O_1O_2O_3$ ed inscritto in $U_1U_2U_3$ (1).

87. Teorema. — Una retta mobile intorno ad un punto fisso U sega due rette fisse u, u' ne' punti A, A'; supposti inoltre dati due punti S, S' in linea retta col punto uu', il punto M comune alle SA, $S'A'$ descrive una retta (2).

Si dimostra osservando che i punti A, A' generano due punteggiate prospettive; e che per conseguenza sono prospettivi anche i fasci generati dai raggi mobili SA, $S'A'$ (Ni 35 e 62).

Si enunci e si dimostri il teorema correlativo.

88. Teorema. — U, S, S' sono tre punti dati in linea retta; intorno ad U ruota una trasversale che incontra due rette fisse u, u' in due punti A, A'; il punto M comune alle SA, $S'A'$ genera una retta passante pel punto uu' (3).

Dimostrazione analoga a quella del teorema precedente.

Questo teorema si può enunciare anche così:

Se i tre lati di un triangolo variabile $AA'M$ ruotano intorno a tre punti fissi U, S, S', situati in linea retta, mentre due vertici A, A' si muovono su due rette date u, u', anche il terzo vertice M descriverà una linea retta (4).

(1) Steiner, *l. c.*, p. 85.
(2) Pappo, *l. c.*, lib. VII, 138, 139, 141, 143. — Cfr. Chasles, *l. c.*, p. 242.
(3) Chasles, *l. c.*, N° 334.
(4) Porisma di Euclide. Cfr. Pappo, *l. c.*, prefazione al lib. VII.

In modo affatto simigliante si dimostra l'enunciato più generale:

Se un poligono di n lati si deforma in modo che tutt'i suoi lati passino per altrettanti punti fissi, situati in linea retta, mentre $n-1$ vertici scorrano su rette fisse, anche l'ultimo vertice, e il punto di concorso di due lati non consecutivi qualisivogliano descriveranno linee rette [1].

La proposizione correlativa è indicata al N° 85.

89. Problema. — Per un punto P dato nel piano di un parallelogrammo $ABCD$ condurre, coll'uso della sola riga, la parallela ad una retta EF situata nello stesso piano.

Siano (fig. 63ª) E, F i punti in cui la retta data incontra i lati AB, AD; preso ad arbitrio un punto K in AC, tirinsi le EK, FK, le quali seghino rispettivamente CD, BC in G, H. I triangoli AEF, CGH sono omologici (N° 16), perchè le congiungenti AC, EG, FH concorrono in K; e l'asse d'omologia è la retta all'infinito, perchè i lati AE, AF del primo triangolo sono ordinatamente paralleli ai corrispondenti CG, CH del secondo. Dunque sono paralleli anche i lati rimanenti EF, GH [2].

Ora il problema è ridotto ad un altro che è già stato risoluto (N° 69, b), vale a dire: date due rette parallele EF, GH, condurre per un punto dato P la parallela alle date.

Ecco un'altra soluzione, dovuta a Lambert [3]. Si prolunghino (fig. 64ª) i lati AB, BC, CD, DA e una diagonale AC del dato parallelogrammo sino ad incontrare EF ne' punti E, F, G, H, I; tirisi ad arbitrio una retta per I, che seghi le EP, GP in A', C'; se Q è il punto di concorso delle HA', FC', sarà PQ la retta domandata.

Infatti: indicati con B', D' i punti ove EP, GP segano rispettivamente FQ, HQ, i quadrilateri $ABCD$, $A'B'C'D'$ sono omologici, essendo EF l'asse d'omologia; il punto P corrisponde al concorso delle AB, CD; e il punto Q al concorso delle BC, AD. Dunque PQ è la retta-limite della seconda figura, epperò PQ è parallela ad EF (N° 16).

a) Problema. — Dato un circolo e il suo centro, tirare coll'uso della sola riga una perpendicolare ad una retta data.

Conducansi (fig. 65ª) nel circolo due diametri AC, BD; la figura $ABCD$ sarà un rettangolo. Quindi, assunto ad arbitrio un punto K della circonferenza, si potrà, mediante la proposizione che precede, tirare KL parallela alla retta data EF. Allora, congiungendo il secondo punto L, comune alla KL ed alla circonferenza, col secondo termine M del diametro che passa per K, sarà evidentemente LM perpendicolare a KL, epperò anche alla retta data.

b) Problema. — Una retta AC è divisa per metà in B; si vuol dividere BC in n parti uguali, usando della sola riga.

(1) Porisma di Pappo, *l. c.*, prefazione al lib. VII.
(2) Poncelet, *Propriétés projectives* (Paris 1822), N° 198.
(3) *Freie Perspective* (Zürich 1774), t. 2°, p. 169.

Costruiscasi (fig. 66ª) un quadrilatero *ULDN*, del quale due lati opposti *DL*, *NU* concorrano in *A*, gli altri due *LU*, *DN* in *C*, e una diagonale *DU* passi per *B*; l'altra diagonale *LN* sarà parallela ad *AC* (N° 51) e bisecata da *DU* in *M* (N° 48). Costruiscasi ora un secondo quadrilatero *VMEO*, sotto le stesse condizioni del precedente, di più, che siano *M* un estremo ed *N* il punto di mezzo della diagonale parallela ad *AC*; o in altre parole: conducansi le *AM*, *BN* che si seghino in *E*, e la *CE* che seghi in *O* il prolungamento di *LN*, sicchè risulterà $NO = MN = LM$. Si costruisca ora un terzo quadrilatero analogo ai primi due, in modo però che siano *N* un estremo ed *O* il punto di mezzo della diagonale parallela ad *AC*. Se *P* è il secondo estremo di questa diagonale, avremo adunque $OP = NO = MN = LM$. Si continui nella stessa guisa sinchè il numero de' segmenti uguali *LM*, *MN*, *NO*, *OP*, ... sia uguale ad *n*; se *PQ* è l'ultimo segmento ottenuto, tirinsi le *LB*, *QC* che concorrano in *Z*; le rette che congiungono *Z* ai punti *M*, *N*, *O*, *P*, ... divideranno *BC* in *n* parti, come si voleva [1].

Così pure si risolvono coll'uso della sola riga i seguenti problemi:

Date due rette parallele *AB* ed *u*, dividere *AB* per metà (N° 51).

Data una retta *AB* divisa per metà in *C*, condurre per un punto dato la parallela ad *AB* (N° 51).

Dato un cerchio ed il suo centro, dividere per metà un angolo dato (N° 52).

Dati due angoli uguali ed adjacenti *AOC*, *COB*, condurre per *O* la perpendicolare ad *OC* (N° 52).

90. Teorema. — Quando due triangoli *ABC*, *A'B'C'*, situati in piani differenti σ, σ', sono prospettivi, se si fa girare il piano dell'uno di essi intorno alla retta $\sigma\sigma'$, il punto *O*, dove concorrono i raggi *AA'*, *BB'*, *CC'*, mutando di posizione, descrive un cerchio il cui piano è perpendicolare alla retta $\sigma\sigma'$ [2].

Siano *D*, *E*, *F* (fig. 158ª) i punti della retta $\sigma\sigma'$ ne' quali concorrano le coppie di lati corrispondenti *BC* e *B'C'*, *CA* e *C'A'*, *AB* e *A'B'* (N° 12). Per *O*, centro di projezione de' due triangoli *ABC*, *A'B'C'*, considerati in una posizione determinata de' loro piani, si conducano le rette *SG*, *SH*, *SK* ordinatamente parallele ai lati del triangolo *A'B'C'*; queste rette, trovandosi in uno stesso piano π, parallelo a σ', incontreranno il piano σ in tre punti *G*, *H*, *K* della retta $\pi\sigma$.

Imaginiamo ora che il piano σ' ruoti intorno alla retta $\sigma\sigma'$, trascinando con sè il triangolo *A'B'C'*. Il gruppo di quattro punti *BCDG* è prospettivo al gruppo *B'C'DG'*, dove *G'* indica il punto all'infinito di *B'C'*; perciò il rapporto anarmonico (*BCDG*) è uguale a (*B'C'DG'*), ossia (N° 53, *e*) a $B'D : C'D$, quantità costante. Dunque, essendo *B*, *C*, *D* tre punti fissi, anche *G* sarà un punto determinato ed invariabile (N° 53, *g*).

[1] Questi ed altri problemi da risolversi colla sola riga si trovano nella citata opera di Lambert.

[2] Chasles, *l. c.*, Nⁱ 368, 369.

I triangoli simili OBG, $B'BD$ dànno poi

$$OG : B'D = BG : BD,$$

donde

$$OG = \frac{B'D \cdot BG}{BD},$$

vale a dire OG è una quantità costante. Ciò significa che il punto O si muove sopra una sfera di centro G, il cui raggio è la costante anzidetta.

Nello stesso modo si dimostra che il punto O si muove sopra due altre sfere, i cui centri sono i punti H, K.

La linea descritta dal punto O, dovendo trovarsi simultaneamente sopra più sfere, è adunque una circonferenza, il cui piano sarà perpendicolare alla retta contenente i centri delle sfere, ed il cui centro sarà situato in questa medesima retta [1].

Questa retta GHK, comune ai piani π, σ, epperò parallela alla $\sigma\sigma'$ (giacchè i piani π, σ' sono paralleli) è la retta di fuga o retta-limite della figura σ, considerata come imagine prospettiva della figura σ' (N° 11).

91. Teorema. — Due fasci projettivi, aventi lo stesso centro O, posti in uno stesso piano σ e privi di raggi uniti, si possono considerare come imagine prospettiva di due fasci direttamente uguali [2].

Taglinsi i due fasci con una trasversale s; ne risulteranno due punteggiate projettive $ABC\ldots$, $A'B'C'\ldots$, sovrapposte e prive di punti uniti. Conducasi per s un piano σ' ad arbitrio; in esso si può determinare un punto U (N° 83, d), dal quale i segmenti AA', BB', CC', ... si projettino tutti sotto angolo costante; vale a dire, projettando le due punteggiate da U, si otterranno due fasci direttamente uguali. Se ora si ponga l'occhio in un punto qualsivoglia della retta OU e da esso si projettino sul piano σ' i fasci dati, si otterranno appunto i fasci uguali anzidetti.

§ 12. Involuzione.

92. Sia O il centro di due fasci projettivi concentrici (fig. 67ª), i quali siano rispettivamente segati dalle trasversali u, u', sicchè ne risultino le punteggiate projettive $ABC\ldots$, $A'B'C'\ldots$; e sia poi u'' la retta sulla quale si segano le coppie di rette AB' ed $A'B$,... (N° 67, a sinistra). Un raggio (non unito) condotto ad arbitrio per O segherà u, u' in due punti non corrispondenti A, B'; e incontrerà u'' in un punto della retta $A'B$. Donde segue che al raggio OA del primo fascio corrisponde il raggio OA' dell'altro;

[1] Baltzer, *Stereom.*, p. 31. [2] Chasles, *l. c.*, N° 480.

e al raggio OB' di questo il raggio OB di quello; cioè ad uno stesso raggio OA od OB', secondo che si consideri come appartenente all'uno o all'altro fascio, corrispondono due raggi OA', OB, che sono distinti fra loro: infatti la retta $A'B$, dovendo incontrare AB' sulla u'', non può passare pel punto O, che si suppone non situato in u''.

Dunque, in generale, in due forme (1) projettive (di 1ª specie) sovrapposte, ad uno stesso elemento corrispondono due elementi distinti, secondo che quello si riguardi come elemento dell'una o dell'altra forma.

Diciamo, in generale, perchè la dimostrazione che precede suppone che O sia fuori di u''.

93. Ma se O è in u'' (fig. 68ª), condotto per O un raggio arbitrario che seghi u, u' in A, B', anche la retta $A'B$ passa per O; cioè al raggio OA od OB' corrisponderà uno stesso raggio OA' od OB; il che esprimeremo col dire che i due raggi si corrispondono in doppio modo, o anche che i due raggi sono conjugati.

Viceversa, si supponga che i due fasci projettivi concentrici abbiano una coppia di raggi che si corrispondano fra loro in doppio modo. Segando i due fasci con due trasversali u, u', diciamo A, B' i punti in cui queste incontrano il primo raggio; il secondo raggio sarà incontrato in B, A'. La retta u'', luogo dei punti ove si segano le coppie di congiungenti MN', $M'N$ (N° 67), relative alle punteggiate projettive u, u', passerà per O, perchè in questo punto si incrociano le AB', $A'B$. Conducendo allora per O un raggio arbitrario che seghi le trasversali per esempio in C, D', la retta $C'D$ passerà anch'essa per O; cioè anche i raggi OCD', ODC' si corrisponderanno in doppio modo. Dunque:

Se due forme projettive (di 1ª specie) sovrapposte hanno una coppia di elementi che si corrispondono in doppio modo, anche in tutte le altre coppie d'elementi corrispondenti, questi si corrisponderanno in doppio modo.

(1) Diciamo due forme, perchè il discorso fatto qui per due fasci di raggi di centro O si può ripetere del tutto analogamente per due punteggiate sovrapposte, o per due fasci di piani aventi lo stesso asse, al che si arriva anche tagliando i due fasci di raggi con una trasversale, ovvero projettandoli da un centro preso fuori del loro piano.

94. Questo caso particolare di due forme projettive (di 1ª specie) sovrapposte si denomina involuzione (¹): involuzione di punti o di raggi o di piani, secondochè gli elementi sono i punti di una retta, o i raggi di un fascio, o i piani di un fascio.

Nell'involuzione, adunque, gli elementi sono conjugati a due a due; cioè ogni elemento ha il suo conjugato; si consideri il primo come appartenente all'una o all'altra forma, il corrispondente è in entrambi i casi il conjugato. Da ciò segue che la considerazione delle due forme riesce superflua, e che l'involuzione può essere concepita come una serie di coppie di elementi conjugati a due a due.

Se si dirà che $AA' \,.\, BB' \,.\, CC' \ldots$ è un'involuzione, s'intenderà di esprimere che A ed A', B e B', C e C',... sono elementi conjugati; del resto ogni elemento potrà essere scambiato col suo conjugato, così che saranno projettive le forme

$$\begin{array}{c} AA'BB'CC' \ldots \\ A'AB'BC'C \ldots . \end{array}$$

95. Siccome l'involuzione non è che un caso particolare di due forme projettive sovrapposte, così qualunque sezione o projezione di un'involuzione produrrà di nuovo un'involuzione (²). Da due elementi conjugati dell'involuzione data nascono due elementi conjugati della nuova.

96. Quando le due punteggiate projettive sovrapposte sono in involuzione, come ad un punto qualunque, così anche al punto all'infinito (I o J') corrisponde un punto unico (I' o J); ossia i punti I' e J coincidono in un punto solo, che diremo O: punto che è il conjugato di quello che è all'infinito. L'equazione (1) del Nº 83 diviene allora

$$OA \,.\, OA' = \text{cost.}$$

Cioè un'involuzione di punti è costituita dalle coppie di punti A, A' pei quali ha luogo la proprietà che il prodotto delle loro distanze da un punto fisso O (della retta data) sia una costante (³). Il punto fisso O dicesi centro o punto centrale dell'involuzione.

(¹) Desargues, *Brouillon project d'une atteinte aux evénements des rencontres d'un cone avec un plan* (Paris 1639): edizione Poudra (Paris 1864), t. I, p. 119.
(²) Desargues, *l. c.*, p. 147. (³) Desargues, *l. c.*, p. 112, 119.

a) Gli elementi uniti di due forme projettive sovrapposte, se queste formano un'involuzione, diconsi elementi doppi dell'involuzione. Per l'involuzione $AA' \, . \, BB' \dots$ avendosi $OA \, . \, OA' = OB \, . \, OB' = \dots$ $=$ ad una costante, se questa costante è positiva, cioè se O non cade fra due punti conjugati, vi saranno due punti doppi E, F, tali che

$$\overline{OE}^2 = \overline{OF}^2 = OA \, . \, OA' = OB \, . \, OB' = \dots$$

cioè O è il punto di mezzo del segmento EF; e i gruppi $EFAA'$, $EFBB'$, ... sono tutti armonici. Dunque:

Se un'involuzione ha due elementi doppi, questi separano armonicamente due elementi conjugati qualisivogliano, ossia l'involuzione è costituita dalle coppie di elementi che formano con due elementi fissi un gruppo armonico.

b) Se la costante è negativa, cioè se O cade fra due punti conjugati, non vi sono punti doppi. In questo caso vi sono due punti conjugati EE' equidistanti da O, pei quali cioè si ha $OE = -OE'$ ed $\overline{OE}^2 = \overline{OE'}^2 = -OE \, . \, OE' = -OA \, . \, OA'$.

c) Se la costante è zero, il solo punto O è doppio; ma allora non vi è involuzione propriamente detta, perchè, dovendo essere nullo il prodotto $OA \, . \, OA'$, ogni coppia di punti conjugati ha un punto coincidente con O.

97. Che nell'involuzione dotata di due elementi doppi, questi siano separati armonicamente mediante due elementi conjugati qualunque, si può dimostrare anche così. Se E, F sono i due elementi doppi, ed A, A' due elementi conjugati, il gruppo $EFAA'$ sarà projettivo al gruppo $EFA'A$, epperò (N° 65) questo o quel gruppo è armonico.

Ovvero anche così. Consideriamo $EAA' \dots$, $EA'A \dots$ come due punteggiate projettive, e projettiamole rispettivamente da due punti S, S' in linea retta con E (fig. 69ª). I fasci projettanti $S(EAA' \dots)$, $S'(EA'A \dots)$ sono prospettivi a cagione del raggio unito $SS'E$; dunque la retta che unisce il punto comune alle SA, $S'A'$, col punto comune alle SA', $S'A$ conterrà le intersezioni di tutte le coppie di raggi corrispondenti, epperò incontrerà la retta data nel secondo punto doppio F. Ma allora la figura ci dà un quadrilatero

completo, nel quale AA' è una diagonale segata dalle altre due diagonali in E, F; dunque $EFAA'$ è una forma armonica (N° 48).

Il teorema attuale è un caso particolare di quello del N° 83, *c*). Donde caviamo che le coppie d'elementi (punti d'una retta, raggi o piani d'un fascio) formanti con due elementi fissi un rapporto anarmonico costante costituiscono due forme projettive sovrapposte, le quali sono in involuzione, nel caso che il rapporto anarmonico abbia il valore -1 (N° 54).

98. L'involuzione è determinata da due coppie di elementi conjugati. Infatti, se sono date le coppie AA', BB', assunto un elemento arbitrario C, si costruirà il suo conjugato C' facendo sì (N° 66) che riescano projettivi i gruppi $AA'BC$, $AA'B'C'$. Allora si suol dire che i sei elementi $AA' . BB' . CC'$ sono in involuzione (cioè essi formano tre coppie di un'involuzione).

Se l'involuzione è di punti, fuori della retta nella quale sono date le due coppie AA', BB' (fig. 70ª, 71ª) assumasi un punto arbitrario G, e descrivansi i circoli GAA', GBB', che si segheranno in un secondo punto H; e sia O il punto ove la retta data è incontrata dalla GH. Allora, per una nota proprietà del cerchio, sarà $OG . OH = OA . OA'$, ed $OG . OH = OB . OB'$, epperò

$$OA . OA' = OB . OB',$$

dunque O è il punto centrale dell'involuzione determinata dalle coppie AA, BB'. Descrivasi ora un circolo qualunque per GH, il quale incontri la retta data in CC'; avremo $OG . OH = OC . OC'$, epperò $OC . OC' = OA . OA' = OB . OB'$, cioè CC' sarà una coppia di punti conjugati dell'involuzione. E in altre parole: il circolo descritto per due punti conjugati CC' o DD',... e per uno de' punti G, H, passa sempre anche per l'altro di questi.

Dunque, le coppie di punti conjugati dell'involuzione non saranno altro che le intersezioni della retta data coi cerchi passanti pei punti GH.

a) Di qui si vede che, se l'involuzione ha punti doppi, questi saranno i punti di contatto della retta data con due cerchi passanti per GH. Abbiamo già veduto che essi punti separano armonicamente sì AA' che BB' (N° 96, *a*), dunque (N° 55, *d*) l'involuzione avrà punti doppi se l'una delle due coppie AA', BB' è tutta

interna o tutta esterna all'altra (fig. 70ª), non li avrà se l'una coppia è separata mediante l'altra (fig. 71ª).

Nel primo caso l'involuzione è (come già si è osservato) costituita dalle infinite coppie di punti che separano armonicamente una coppia di punti fissi.

b) Nel secondo caso invece l'involuzione è segnata sulla retta data dai lati di un angolo retto mobile intorno al suo vertice. Infatti, siccome i punti AA' sono separati mediante BB', se si descrivono (fig. 72ª) i cerchi sui diametri AA', BB', essi si segheranno in due punti G, H situati simmetricamente rispetto alla retta data: cioè la retta GH è perpendicolare alla retta data e da essa divisa per metà in O, punto centrale dell'involuzione. Da ciò segue che

$$\overline{OG}^2 = \overline{OH}^2 = AO \,.\, OA' = BO \,.\, OB',$$

e che tutti gli altri cerchi passanti per GH, i quali segnano sulla retta data le altre coppie CC', DD',... dell'involuzione, avranno pur essi i loro centri sulla retta AB..., cioè avranno per diametri i segmenti CC', DD',.... Dunque se i segmenti AA', BB', CC',... si projettano dal punto G (o dal punto H), si avranno altrettanti angoli retti AGA', BGB', CGC',... (oppure AHA', BHB', CHC',...).

Concludiamo: Se un'involuzione di punti $AA' \,.\, BB'$ ... in linea retta non ha punti doppi, cioè se il rettangolo $OA \,.\, OA'$ è una costante negativa $-k^2$, i segmenti AA', BB',... sono tutti veduti sotto angoli retti da ogni punto del circolo di centro O, il cui raggio è k, e il cui piano è perpendicolare alla retta data.

Questo teorema è un caso particolare di quello del N° 83, *d*). Dunque, se un angolo di grandezza costante ruota nel suo piano intorno al suo vertice, i suoi lati determinano sopra una trasversale fissa due punteggiate projettive, le quali sono in involuzione nel caso che l'angolo sia retto.

99. Consideriamo un'involuzione di raggi, i quali siano paralleli, cioè abbiano un punto comune a distanza infinita. La retta all'infinito è un raggio dell'involuzione; il raggio ad essa conjugato contiene il punto centrale (N° 96) dell'involuzione di punti che si ottiene facendo una sezione con una trasversale arbitraria. Perciò il raggio suddetto si può denominare raggio centrale dell'involuzione proposta. Viceversa, se si projetta un'involuzione di punti per mezzo di raggi paralleli, questi costituiranno una nuova involuzione, il cui raggio centrale passerà pel punto centrale dell'involuzione data.

Allorchè da un'involuzione se ne cava un'altra mediante projezioni o sezioni (N° 95), dagli elementi doppi della prima nascono gli elementi doppi della seconda.

100. Siccome nell'involuzione un gruppo qualunque di elementi è projettivo al gruppo degli elementi conjugati, così quattro punti scelti ad arbitrio in un'involuzione di punti avranno un rapporto anarmonico uguale a quello dei loro conjugati. Per esempio, data l'involuzione $AA'.BB'.CC'...$, saranno projettivi i gruppi $ABA'C'$, $A'B'AC$, epperò

$$\frac{AA'}{BA'}:\frac{AC'}{BC'}=\frac{A'A}{B'A}:\frac{A'C}{B'C},$$

ossia

$$AB'.BC'.CA'+A'B.B'C.C'A=0.$$

Viceversa, se sussiste questa relazione fra i segmenti determinati dai punti $AA'BB'CC'$ di una retta, questi saranno accoppiati in involuzione. Infatti, la relazione anzidetta equivale all'uguaglianza de' rapporti anarmonici $(ABA'C')$, $(A'B'AC)$; questi gruppi sono dunque projettivi. Ma in essi, A ed A' si corrispondono in doppio modo; dunque (N° 93) ecc.

101. Abbiasi un quadrangolo completo $QRST$ (fig. 73ª) i cui lati opposti RT e QS, ST e QR, QT ed RS siano segati da una trasversale arbitraria in A ed A', B e B', C e C'; e sia P l'intersezione di QS ed RT. Allora $ATPR$ è la projezione di $ACA'B'$ dal centro Q, ed è anche la projezione di $ABA'C'$ dal centro S; dunque il gruppo $ACA'B'$ è projettivo ad $ABA'C'$, ossia (N° 56) $A'C'AB$. I punti A ed A' si corrispondono in doppio modo ne' gruppi projettivi $ACA'B'$, $A'C'AB$; dunque (N° 93) $AA'.BB'.CC'$ sono tre coppie di punti conjugati d' un' involuzione. Ossia:

Le tre coppie di lati opposti di un quadrangolo completo sono segate da una trasversale arbitraria in tre coppie di punti conjugati in involuzione ([1]).

Abbiasi un quadrilatero completo $qrst$ (fig. 74ª), i cui vertici opposti rt e qs, st e qr, qt ed rs siano projettati da un centro arbitrario, per mezzo dei raggi a ed a', b e b', c e c'; e sia p la congiungente di qs ed rt. Allora i fasci $atpr$, $aca'b'$ sono projettivi, perchè prospettivi (sezione comune q); e così pure sono prospettivi (sezione comune s) epperò projettivi i fasci $atpr$, $aba'c'$. Dunque il fascio $aca'b'$ è projettivo al fascio $aba'c'$, vale a dire (N° 56) al fascio $a'c'ab$. I raggi a, a' si corrispondono in doppio modo ne' gruppi projettivi $aca'b'$, $a'c'ab$; dunque $aa'.bb'.cc'$ sono tre coppie di raggi conjugati in involuzione. Ossia:

Le tre coppie di vertici opposti di un quadrilatero completo sono projettate da un centro arbitrario per mezzo di tre coppie di raggi conjugati in involuzione.

([1]) DESARGUES, l. c., p. 171.

O in altre parole:

Se un quadrangolo completo si deforma in modo che cinque de' suoi lati passino per altrettanti punti fissi, dati in linea retta, il sesto lato ruoterà anch'esso intorno ad un punto fisso della medesima retta, il quale con quei cinque costituisce un'involuzione di sei punti.

O in altre parole:

Se un quadrilatero completo si deforma in modo che cinque de' suoi vertici scorrano su cinque rette fisse, concorrenti in un punto, anche il sesto vertice si manterrà sopra un raggio uscente dallo stesso punto, ed i sei raggi saranno accoppiati in involuzione.

a) Il teorema che precede (a sinistra), combinato con quello del N° 100, dà [1]:

Se una trasversale incontra in A ed A', B e B', C e C' le tre coppie di lati opposti di un quadrangolo completo, fra i segmenti della trasversale avrà luogo la relazione

$$AB' \,.\, BC' \,.\, CA' + A'B \,.\, B'C \,.\, C'A = 0\,.$$

b) Nel teorema, a destra, denotiamo con U ed U', V e V', W e W' i vertici opposti rt e qs, st e qr, qt e rs del quadrilatero $qrst$, e con $AA'.BB'.CC'$ i punti in cui i raggi $aa'.bb'.cc'$ sono segati da una trasversale arbitraria. In virtù del N° 95, potremo allora enunciare la proposizione che segue:

I sei punti $AA'.BB'.CC'$ che si ottengono projettando da un centro arbitrario e sopra una retta arbitraria le tre coppie UU', VV', WW' di vertici opposti di un quadrilatero completo sono accoppiati in involuzione.

c) Suppongasi ora che il centro di projezione G sia uno de' due punti comuni ai due cerchi aventi per diametri le diagonali UU', VV'; gli angoli AGA', BGB' risultano retti, epperò (N° 98, *b*) sarà retto anche l'angolo CGC'; vale a dire, il cerchio descritto sul diametro WW' passerà per G. Dunque:

I tre cerchi aventi risp. per diametri le tre diagonali di un quadrilatero completo passano per gli stessi due punti.

d) I tre cerchi hanno i loro centri in linea retta; dunque:

I punti di mezzo delle tre diagonali di un quadrilatero completo sono in linea retta [2].

102. Dal teorema (a sinistra) del N° 101 si cava la costruzione del sesto punto C', quando sono dati gli altri cinque. Condotta ad arbitrio una retta per C e presi in essa due punti

Dal teorema (a destra) del N° 101 si cava la costruzione del sesto raggio c', quando sono dati gli altri cinque. Preso ad arbitrio un punto in c e condotte da esso due rette q, t, con-

[1] Pappo, *l. c.*, lib. VII, 130.

[2] Chasles, *l. c.*, Ni 344 e 345.

Q, T, tirinsi le AT, BT, $A'Q$, $B'Q$: la retta che congiunge il punto R comune alle AT, $B'Q$ col punto S comune alle $A'Q$, BT incontrerà la retta data nel punto cercato C'.

giugansi il punto ta col punto qb', ed il punto tb col punto qa'; le congiungenti r, s concorrono in un punto che unito al centro del fascio dato darà il raggio cercato c'.

a) Nel problema a sinistra, se il punto C è all'infinito, il suo conjugato sarà il punto centrale dell'involuzione. Per trovare adunque il punto centrale O dell'involuzione, della quale siano date due coppie AA', BB' di punti conjugati, si costruirà (fig. 75ª) il quadrangolo completo in modo che due lati opposti passino per A, A', altri due lati opposti per B, B', e il quinto lato sia parallelo alla retta data; il sesto lato passerà per O.

b) Il sesto punto C' che con altri cinque $AA'BB'C$ costituisce un'involuzione di sei punti è da questi determinato in modo unico: cioè vi è un solo punto C' che possegga tale proprietà (cfr. N° 98). Infatti, esso punto può riguardarsi come determinato dall'uguaglianza di rapporti anarmonici $(AA'BC) = (A'AB'C')$, dunque (N° 53, *g*) ecc.

103. Il teorema del N° 101, a sinistra, si può invertire dicendo:
Se una trasversale sega i lati di un triangolo RSQ (fig. 73ª) in tre punti A', B', C', i quali siano risp. accoppiati in involuzione con tre altri punti A, B, C della medesima trasversale, le rette RA, SB, QC concorreranno in uno stesso punto T.

Infatti, sia T il punto comune alle RA, SB, e C_1 il punto in cui la trasversale incontra TQ. In virtù del teorema anzidetto, applicato al quadrangolo $QRST$, avremo $(AA'BC_1) = (A'AB'C')$; ma è per ipotesi $(AA'BC) = (A'AB'C')$, dunque (N° 53, *g*) C_1 coincide con C, ossia QC passa per T.

Ecco il teorema correlativo:
Se da un punto S si projettano i vertici di un triangolo rsq (fig. 74ª) mediante tre raggi a', b', c', i quali siano risp. accoppiati in involuzione con tre altri raggi a, b, c, uscenti da S, i punti ra, sb, qc saranno in una stessa retta t.

104. Siano R', S', Q' i punti ne' quali le SQ, QR, RS sono risp. incontrate dalle RT, ST, QT (veggasi la fig. 73ª, dove però i punti R', S', Q' non sono segnati). Ne' lati del triangolo RSQ avremo allora i gruppi di quattro punti

$$SQR'A',\quad QRS'B',\quad RSQ'C'$$

le cui projezioni da T sulla trasversale sono

$$BCAA',\ CABB',\ ABCC'.$$

Se formiamo il prodotto de' rapporti anarmonici di questi ultimi gruppi risulta

$$\left(\frac{BA}{CA}:\frac{BA'}{CA'}\right)\left(\frac{CB}{AB}:\frac{CB'}{AB'}\right)\left(\frac{AC}{BC}:\frac{AC'}{BC'}\right),$$

ossia

$$-\frac{BA'\,.\,CB'\,.\,AC'}{CA'\,.\,AB'\,.\,BC'},$$

quantità che è uguale a -1, in virtù del N° 100. Dunque:

Se i lati di un triangolo sono segati da una trasversale arbitraria, e se i vertici si projettano da un punto arbitrario sui lati risp. opposti, il prodotto de' rapporti anarmonici de' gruppi di quattro punti che si ottengono sui tre lati è l'unità negativa.

Viceversa, nei lati di un triangolo RSQ sian prese tre coppie di punti $R'A'$, $S'B'$, $Q'C'$ in modo che il prodotto de' rapporti anarmonici $(SQR'A')$, $(QRS'B')$, $(RSQ'C')$ sia -1; se le rette RR', SS', QQ' concorrono in un punto, i punti $A'B'C'$ saranno in linea retta; e reciprocamente, se $A'B'C'$ sono tre punti in linea retta, le RR', SS', QQ' hanno un punto comune.

a) Suppongasi la trasversale portata a distanza infinita; i rapporti anarmonici $(SQR'A')$, $(QRS'B')$, $(RSQ'C')$ divengono rispettivamente uguali (N° 53, *e*) ad $SR':QR'$, $QS':RS'$, $RQ':SQ'$; dunque (¹):

Se tre rette uscenti da uno stesso punto T e passanti risp. pei vertici di un triangolo RSQ incontrano i lati opposti in R', S', Q', fra i segmenti dei lati si ha la relazione:

$$\frac{SR'}{QR'}\cdot\frac{QS'}{RS'}\cdot\frac{RQ'}{SQ'}=-1;$$

e viceversa, se nei lati di un triangolo RSQ si prendono i punti R', S', Q' in modo che sussista la predetta rela-

(¹) Teorema di CEVA: *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio* (Mediolani 1678), I, 2. — Cfr. BALTZER, *Trigon.*, p. 131.

zione, le congiungenti RR', SS', QQ' concorreranno in un punto T.

b) Ritenuta la trasversale essere del tutto arbitraria, assumansi le ST, QT risp. parallele alle QR, RS; allora i punti S', Q' vanno all'infinito, ed R' risulta il punto di mezzo di SQ (come punto comune alle diagonali QS, RT del parallelogrammo $QRST$). Perciò i rapporti anarmonici $(SQR'A')$, $(QRS'B')$, $(RSQ'C')$ saranno risp. uguali a $-(QA':SA')$, $RB':QB'$, $SC':RC'$; dunque [1]:

Se una trasversale sega i lati di un triangolo RSQ in A', B', C', fra i segmenti dei lati sussiste la relazione:

$$\frac{QA'}{SA'}\cdot\frac{RB'}{QB'}\cdot\frac{SC'}{RC'}=1,$$

e viceversa, se nei lati di un triangolo RSQ si prendono tre punti A', B', C' in modo che sussista la predetta relazione, questi tre punti saranno in linea retta.

105. Noi abbiamo veduto che, date due punteggiate projettive $(ABC\ldots)$, $(A'B'C'\ldots)$ situate in uno stesso piano, se dal punto comune a due rette analoghe alle AB' e $A'B$, AC' e $A'C$, ..., BC' e $B'C$, ..., si projettano entrambe le punteggiate date, i raggi projettanti formano un'involuzione. I teoremi correlativi sono i seguenti:

Dati due fasci projettivi di raggi $(abc\ldots)$, $(a'b'c'\ldots)$, posti in uno stesso piano ma non concentrici, se si segano colla retta congiungente due punti analoghi ad ab' e $a'b$, ac' e $a'c$, ... bc' e $b'c$ ..., si ottengono coppie di punti in involuzione.

Dati due fasci projettivi di piani $(\alpha\beta\gamma\ldots)$, $(\alpha'\beta'\gamma'\ldots)$, i cui assi siano concorrenti, se si fa una sezione col piano trasversale determinato da due rette analoghe alle $\alpha\beta'$ e $\alpha'\beta$, $\alpha\gamma'$ e $\alpha'\gamma$, ..., $\beta\gamma'$ e $\beta'\gamma$, ..., si ottengono coppie di raggi in involuzione.

Dati due fasci projettivi di raggi $(abc\ldots)$, $(a'b'c'\ldots)$, aventi lo stesso centro ma non situati in uno stesso piano, se si projettano da un punto comune a due piani come ab' e $a'b$, ac' e $a'c$, ..., bc' e $b'c$, ..., i piani projettanti costituiscono un'involuzione.

106. Casi particolari. — *a*) Quante si vogliano coppie di punti di una retta, equidistanti da un punto fisso della medesima, costituiscono una involuzione, perchè ogni coppia è separata armonicamente mediante il punto fisso e il punto all'infinito.

Viceversa, se il punto all'infinito è uno degli elementi doppi di un'invo-

[1] Teorema di Menelao: *Sphærica* III, 1. — Cfr. Baltzer, *Trigon.*, p. 134.

luzione di punti, ogni coppia di elementi conjugati ha il suo punto di mezzo nell'altro punto doppio. Se in un'involuzione, due coppie AA', BB' di punti conjugati hanno lo stesso punto di mezzo, questo sarà anche il punto di mezzo di qualunque altra coppia CC'.

b) Quanti si vogliano angoli rettilinei aventi lo stesso vertice e situati in uno stesso piano, ed inoltre divisi tutti per metà da una stessa retta fissa, costituiscono un'involuzione, perchè i lati di ciascun angolo sono divisi armonicamente dalla bisettrice comune e dal raggio a questa perpendicolare.

Viceversa, se gli elementi doppi di un'involuzione di raggi sono due rette perpendicolari fra loro, due raggi conjugati di ciascuna coppia fanno angoli uguali con ciascuno de' raggi doppi. Se in un'involuzione, gli angoli di due coppie aa', bb' di raggi conjugati hanno le bissettrici comuni, queste saranno anche le bissettrici degli angoli di qualunque altra coppia cc'.

c) Quanti si vogliano angoli diedri, aventi lo stesso spigolo e tutti divisi per mezzo da un piano fisso, costituiscono un'involuzione, perchè le facce di ciascun diedro sono separate armonicamente mediante un piano fisso ed il piano perpendicolare a questo e passante per lo spigolo comune.

Viceversa, se gli elementi doppi di un'involuzione di piani sono piani fra loro perpendicolari, i piani conjugati di ciascuna coppia fanno angoli uguali con ciascuno de' piani doppi, ecc.

§ 13. Forme projettive nel cerchio.

107. Siano dati in un piano due fasci (direttamente) uguali di raggi $abcd...$, $a'b'c'd'...$, i cui centri siano i punti O, O' (fig. 76ª); siccome l'angolo di due raggi corrispondenti aa', bb', cc',... è costante (N° 80), così il luogo geometrico del punto comune a due raggi corrispondenti sarà un cerchio [1] passante pei punti O, O'. La tangente al cerchio in O fa colla corda $O'O$ un angolo che è uguale a ciascuno degli angoli OAO', OBO', OCO',...; ma lo stesso angolo dee fare col raggio $O'O$ del secondo fascio il corrispondente raggio del primo; dunque la tangente in O è appunto quel raggio q del primo fascio il cui corrispondente q' del secondo è la $O'O$.

Se concepiamo la circonferenza come percorsa dal punto mobile A, i raggi mobili AO, AO', ossia a, a', genereranno i due fasci; quando A sia vicinissimo ad O, il raggio AO' differirà assai poco in posizione da OO' ossia da q', e il raggio AO differirà assai poco da q, cioè dalla tangente in O. Ciò concorda colla definizione della

[1] Baltzer, *Planim.*, p. 45.

tangente in O: la retta che congiunge O al punto infinitamente prossimo della circonferenza.

Similmente, al raggio OO' ossia p del primo fascio corrisponderà nel secondo il raggio p' che tocca il cerchio in O'.

108. Viceversa, se quantisivogliano punti $A, B, C, D,$... di un cerchio siano projettati da due punti O, O' del cerchio medesimo, i raggi projettanti $O(A . B . C . D ...)$, $O'(A . B . C . D ...)$ costituiscono due fasci che sono (direttamente) uguali, a cagione degli angoli uguali $AOB = AO'B$, $AOC = AO'C, ...$, $BOC = BO'C, ...$, epperò projettivi (N° 78). In altre parole: se restano fissi i punti $A, B, C, ...$, mentre il centro del fascio si muove sulla circonferenza, il fascio si conserva sempre uguale epperò projettivo a sè medesimo.

Il raggio che projetta da O lo stesso punto O, o più precisamente il punto del circolo infinitamente vicino ad O, è la tangente in O. Da ciò segue che ne' fasci projettivi $O(A . B . C ....)$, $O'(A . B . C ....)$ il raggio del primo fascio che corrisponde al raggio $O'O$ del secondo è la tangente in O.

109. Siccome in due forme projettive a quattro elementi armonici corrispondono sempre quattro elementi armonici (N° 58), così se i quattro raggi $O(A . B . C . D)$ sono armonici, sarà pure armonico il gruppo $O'(A . B . C . D)$, comunque sia situato il punto O' sul circolo. Facendo coincidere O' col punto infinitamente prossimo ad A, ne segue essere armonico il gruppo costituito dalla tangente in A e dalle corde AB, AC, AD. Similmente, sarà armonico il fascio composto della corda AB, della tangente in B e delle corde BC, BD; ecc.

In questo caso, si dirà che i quattro punti $ABCD$ del cerchio sono armonici (1).

110. Se $PQ, P'Q'$ sono due tangenti fisse d'un cerchio di centro M (fig. 77ª), ed AA' una tangente variabile limitata fra le due tangenti fisse, l'angolo AMA' è costante. Infatti, detti Q, P', T i punti di contatto, si ha

$$\text{angolo } AMA' = AMT + TMA'$$
$$= \tfrac{1}{2}\, QMT + \tfrac{1}{2}\, TMP' = \tfrac{1}{2}\, QMP' \quad (2).$$

(1) Steiner, *l. c.*, p. 157. (2) Baltzer, *Planim.*, pag. 6 e 13.

Variando la retta AA' fra le due tangenti fisse, i raggi MA, MA' generano adunque due fasci projettivi (N° 82), epperò i punti A, A' descrivono due punteggiate projettive. Dunque:

Le tangenti del cerchio segano due tangenti fisse in punti costituenti due punteggiate projettive [1].

Siccome l'angolo AMA' è uguale a $\frac{1}{2}QMP'$, cioè a ciascuno degli angoli QMQ', PMP' (dove P, Q' indicano uno stesso punto, secondo che si riguarda situato nella prima o nella seconda tangente fissa), così i punti Q e Q', P e P' sono corrispondenti nelle due punteggiate projettive; vale a dire, i punti di contatto delle due tangenti fisse sono i corrispondenti del punto comune alle medesime.

Se concepiamo il cerchio come percorso (inviluppato) dalla tangente mobile, i punti A, A' generano le due punteggiate projettive: quando la tangente mobile abbia una posizione prossima a quella di PQ, il punto A' sarà prossimo a Q', ed il punto A sarà prossimo al punto corrispondente di Q', cioè al punto di contatto della PQ. Dunque:

Il punto di contatto d'una tangente è da considerarsi come intersezione di questa colla tangente infinitamente vicina.

111. Il teorema che precede torna a dire che quattro tangenti $abcd$ di un cerchio sono segate da una quinta tangente in quattro punti $ABCD$, il cui rapporto anarmonico è costante, qualunque sia questa quinta tangente.

La quinta tangente può anche essere infinitamente prossima ad una delle prime quattro, per esempio ad a; allora A è il punto di contatto di a, e B, C, D sono le intersezioni ab, ac, ad.

Come caso particolare, se $abcd$ segano PQ in quattro punti armonici, anche le intersezioni di $abcd$ con qualsivoglia altra tangente del cerchio formeranno un gruppo armonico. Sarà dunque armonico il gruppo costituito dal punto di contatto di a e dai punti d'intersezione ab, ac, ad, ecc. In tal caso le quattro tangenti $abcd$ *diconsi armoniche* [2].

112. Siano (fig. 78ª) $A, B, C, \ldots. X$ punti del cerchio; ed $a, b, c, \ldots. x$ le tangenti relative. Se i punti $A', B', C', \ldots$, ove x è segata dalle $a, b, c, \ldots$ si projettano dal centro del cerchio, i raggi

[1] BALTZER, *Trigon.*, pag. 155. [2] STEINER, *l. c.*, p. 157.

projettanti sono rispettivamente perpendicolari alle corde XA, XB, XC,..., epperò formano (N° 82) un fascio uguale al fascio $X(A, B, C,...)$. Dunque la punteggiata $A'B'C'$... è projettiva al fascio $X(ABC....)$, [1] ossia

La punteggiata che più tangenti date del cerchio determinano sopra una tangente arbitraria è projettiva al fascio de' raggi che projettano i loro punti di contatto da un punto arbitrario del cerchio medesimo.

Di qui segue come caso particolare che, se $X(ABCD)$ è un gruppo armonico, tale è anche $A'B'C'D'$, cioè:

Se quattro punti di un cerchio sono armonici, sono armoniche le relative tangenti, e viceversa.

§ 14. Forme projettive nelle coniche.

113. S'imagini di costruire una figura omologica (N° 18) a ciascuna di quelle che esprimono i teoremi dei N[i] 108, 110, 112. Ai punti ed alle tangenti del cerchio corrisponderanno i punti e le tangenti d'una conica (N° 18, *f*). Dunque anche per una conica, una tangente è la retta che incontra la curva in due punti infinitamente vicini; e un punto della curva è l'intersezione di due tangenti infinitamente vicine; a due fasci uguali, epperò projettivi, corrisponderanno due fasci projettivi, e a due punteggiate projettive corrisponderanno ancora due punteggiate projettive; giacchè due fasci o due punteggiate che si corrispondano in due figure omologiche sono due forme prospettive. Dunque, dai detti teoremi si concluderà:

a) Se quantisivogliano punti $ABCD$.... di una conica (fig. 79[a]) si projettano da due punti fissi O, O' della medesima, i raggi projettanti $O(A, B, C, D...)$, $O'(A, B, C, D...)$ formano due fasci projettivi. Al raggio OO' del primo fascio corrisponde la tangente in O', ed al raggio $O'O$ del secondo fascio corrisponde la tangente in O.

b) Quantesivogliano tangenti *abcd*.... di una conica (fig. 80[a]) segano due tangenti fisse o, o' della medesima in punti formanti due punteggiate projettive. Al punto

[1] Baltzer, *Trigon.*, pag. 157.

oo' della prima punteggiata corrisponde il punto di contatto di o'; ed al punto $o'o$ della seconda punteggiata corrisponde il punto di contatto di o (1).

c) La punteggiata che più tangenti d'una conica (fig. 81ª) determinano sopra una tangente fissa è projettiva al fascio che projetta i punti di contatto da un punto fisso della conica medesima.

114. Dimostreremo ora le proprietà inverse de' teoremi *a*), *b*); ossia:

a) Se due fasci di raggi esistenti in uno stesso piano (non concentrici) sono projettivi (non prospettivi), il luogo del punto comune a due raggi corrispondenti è una conica, passante pei centri de' due fasci, ed ivi toccata da quei raggi de' due fasci che corrispondono alla retta congiungente i centri.

Siano P, Q i centri de' due fasci (fig. 82ª); PA e QA, PB e QB, ... le coppie di raggi corrispondenti. Il luogo dei punti A, B, ... passa pel punto Q, perchè in Q si segano il raggio PQ del fascio P ed il corrispondente raggio del fascio Q. Analogamente, P è un punto del luogo.

Sia q il raggio del fascio Q che corrisponde al raggio PQ del fascio P, e descrivasi un cerchio tangente a q in Q, il quale seghi le rette QA, QB, ..., QP in A', B', ..., P'. I triangoli PAB e $P'A'B'$, PAC e $P'A'C'$, ... sono omologici; infatti le rette PP', AA', BB', CC', ... concorrono tutte in Q; dunque (N° 12, *b*) le coppie di lati PA e $P'A'$, PB e $P'B'$, PC e $P'C'$, ..., AB e $A'B'$, AC e $A'C'$, ... si segheranno in punti di una retta fissa s. Ne segue (N° 16) che il cerchio e il luogo de' punti $ABC ... PQ$ sono curve omologiche; Q è il centro ed s è l'asse d'omologia. Dunque (N° 18, *f*) il luogo cercato è una conica.

Nelle due figure omologiche, il punto Q e la retta q corrispondono a sè stessi (N° 18, *h*); dunque la tangente in Q alla conica è la stessa retta q.

b) Se due rette punteggiate, situate in uno stesso piano (non sovrapposte) sono projettive (non prospettive), le rette congiungenti le coppie di punti corrispondenti in-

(1) Steiner, *l. c.*, p. 139.

viluppano una conica; vale a dire, sono le tangenti di una conica. Questa conica tocca le due rette date, nei punti che corrispondono alla loro comune intersezione.

Siano s, s' (fig. 83ª) le due rette punteggiate projettive, A ed A', B e B',... coppie di punti corrispondenti. La curva inviluppata dalle congiungenti AA', BB'... ha per tangente anche la retta s, perchè questa congiunge il punto $s's$ o Q' della seconda punteggiata al corrispondente punto Q della prima. Analogamente, s' è un'altra tangente.

Descrivasi un cerchio tangente ad s in Q, e ad esso tirinsi le tangenti AA'', BB'',... dai vari punti di s, le quali seghino in A'', B'',... la tangente che parte da Q'. Così la AA' seghi le BB', CC',... in H', K'..., e la AA'' seghi le BB'', CC'',... in H'', K'',.... I triangoli $A'B'H'$ ed $A''B''H''$, $A'C'K'$ ed $A''C''K''$,... sono omologici, perchè le coppie di lati $A'B'$ ed $A''B''$, $A'H'$ ed $A''H''$, $B'H'$ e $B''H''$,.... si segano nei punti Q', A, B, C,... nella retta fissa s; dunque (N° 13) le congiungenti dei vertici $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$,... $H'H''$, $K'K''$,... concorreranno in un punto fisso O. Segue da ciò che la figura formata dalle rette AA', BB', CC',.... e la figura formata dalle AA'', BB'', CC'',... cioè dalle tangenti del cerchio sono omologiche (N° 16): s è l'asse ed O è il centro d'omologia; dunque l'inviluppo cercato è una curva omologica ad un cerchio; vale a dire, essa è una conica (N° 18, f).

Nelle due figure omologiche, la retta s ed il punto Q corrispondono a sè medesimi (N° 18, h); dunque il punto di contatto della conica con s è Q (1).

c) I teoremi a), b) del presente N° sono correlativi (N° 27), giacchè la figura costituita dai punti d'intersezione de' raggi corrispondenti di due fasci projettivi ha per correlativa la figura formata dalle rette congiungenti i punti corrispondenti di due punteggiate projettive. Dunque, in due figure correlative (secondo la legge di dualità nel piano) ai punti di una conica corrispondono le tangenti di un'altra conica.

115. Avuto riguardo ai Nⁱ 58 e 61, i teoremi dei Nⁱ 113 e 114 si possono anche formulare come segue:

a) Il rapporto anarmonico delle quattro rette che da

(1) Chasles, *Traité des sections coniques* (Paris 1865), Nⁱ 8, 9.

quattro punti fissi di una conica vanno ad un punto variabile della medesima è costante.

b) Il rapporto anarmonico dei quattro punti in cui quattro tangenti fisse di una conica sono segate da una tangente variabile della medesima è costante [1].

Si denomini rapporto anarmonico di quattro punti dati $ABCD$ di una conica il rapporto anarmonico delle quattro rette $O(A.B.C.D)$, dove O sia un punto qualsivoglia della conica. Si denomini rapporto anarmonico di quattro tangenti date $abcd$ di una conica il rapporto anarmonico de' quattro punti $o(a.b.c.d)$, dove o sia una tangente qualsivoglia della conica.

c) Il rapporto anarmonico di quattro tangenti di una conica è uguale al rapporto anarmonico de' loro punti di contatto [2].

a') Il luogo di un punto dal quale quattro punti dati $ABCD$ siano projettati mediante quattro raggi il cui rapporto anarmonico sia dato è una conica che passa pei punti dati. La tangente in uno di questi, per esempio in A, è una tal retta che colle AB, AC, AD dà un gruppo il cui rapporto anarmonico è uguale al dato.

b') La curva inviluppata dalle rette che sono segate da quattro rette date in quattro punti aventi un rapporto anarmonico dato è una conica, che tocca anche le rette date. Il punto di contatto di una di queste, per esempio di a, forma insieme coi punti ab, ac, ad un gruppo il cui rapporto anarmonico ha il valor dato [3].

116. Per cinque punti O, O', A, B, C dati ad arbitrio in un piano (fig. 79ª), tre qualunque de' quali non siano in linea retta, si può descrivere una conica. Infatti, basterà costruire i fasci projettivi, i cui centri sono due de' punti dati, per esempio O, O', in modo che negli altri tre punti si seghino tre coppie di raggi corrispon-

Si può descrivere una conica che tocchi cinque rette o, o', a, b, c date in uno stesso piano (fig. 80ª), tre qualunque delle quali non concorrano insieme. Infatti, basterà costruire le punteggiate projettive, mediante le tre coppie di punti corrispondenti (oa ed $o'a$, ob ed $o'b$, oc ed $o'c$) che tre delle rette date a, b, c determinano sulle

(1) Steiner, *l. c.*, p. 156.
(2) Chasles, *Géom. sup.*, N° 663.
(3) Steiner, *l. c.*, p. 156-7.

denti OA ed $O'A$, OB ed $O'B$, OC ed $O'C$. Ogni altra coppia OD, $O'D$ di raggi corrispondenti darà un nuovo punto D della curva.

a) Per costruire la tangente in uno de' punti dati, per es. in O, basterà determinare il raggio del fascio O che corrisponde al raggio $O'O$ del fascio O'.

b) Pei cinque punti dati non passa che una sola conica; se ne passassero due, queste avrebbero in comune infiniti altri punti (determinati dalle coppie di raggi corrispondenti de' fasci projettivi), il che è assurdo.

c) Di qui segue inoltre:

Per quattro punti passano infinite coniche; due qualunque di esse non hanno alcun punto comune, oltre ai quattro dati.

altre due o, o'. La congiungente d di ogni altra coppia di punti corrispondenti sarà una nuova tangente della curva.

Per costruire il punto di contatto di una delle rette date, per es. di o', basterà determinare il punto della punteggiata o che corrisponde al punto $o'o$ della punteggiata o'.

Vi è una sola conica che tocchi le cinque rette date; se ce ne fossero due, esse avrebbero infinite altre tangenti comuni (le rette determinate dalle coppie di punti corrispondenti delle punteggiate projettive), il che è assurdo.

Vi sono infinite coniche alle quali sono tangenti quattro rette date; due qualunque di quelle coniche non possono avere un'altra tangente comune.

117. Adesso i teoremi del N° 70 si possono enunciare come segue:

Se un esagono è circoscritto ad una conica (fig. 53ª e 84ª), le rette che congiungono le tre coppie di vertici opposti concorrono in uno stesso punto [1].

Se un esagono è inscritto in una conica (fig. 54ª e 85ª), le tre coppie di lati opposti si segano in tre punti d'una stessa retta [2].

a) Il teorema di PASCAL concerne sei punti come quello di BRIANCHON sei tangenti di una conica: i quali sei punti o tangenti possono essere presi ad arbitrio fra tutt'i punti o tutte le tangenti della curva. E siccome la conica è individuata da cinque punti o da cinque tangenti; che è quanto dire, che cinque punti o cinque tangenti possono essere assunti ad arbitrio fra i punti o le rette del piano, e che, dopo avere scelti questi cinque elementi, la conica

[1] Teorema di BRIANCHON: pubblicato la prima volta nel 1806 e riprodotto più tardi nel *Mémoire sur les lignes du second ordre* (Paris 1817), pag. 34.

[2] Teorema di PASCAL: *Essais pour les coniques*, opuscolo di sette pagine in-8°, pubblicato la prima volta nel 1640, quando l'Autore non aveva che sedici anni, poi riprodotto nell'edizione delle *Œuvres de Pascal* (Haye 1779) ed anche recentemente dal signor WEISSENBORN nella prefazione al suo libro *Die Projection in der Ebene* (Berlin 1862).

risulta determinata; così il teorema di Pascal esprime la condizione necessaria e sufficiente, alla quale debbono soddisfare sei punti del piano affinchè per essi possa descriversi una conica; e il teorema di Brianchon è del pari la condizione necessaria e sufficiente, cui devono soddisfare sei rette del piano, affinchè si possa descrivere una conica che le tocchi tutte e sei.

b) Che la condizione sia necessaria risulta dagli stessi enunciati del N° 117; sei punti di una conica si possono considerare, presi in un ordine qualunque, come vertici di un esagono inscritto; e siccome per ogni esagono inscritto ha luogo il teorema di Pascal, così è necessario che, in qualunque ordine vengano connessi i sei punti per formare l'esagono, le coppie di lati opposti concorrano in tre punti in linea retta.

c) La condizione è anche sufficiente. Infatti (fig. 85ª), supponiamo che l'esagono $AB'CA'BC'$, risultante dal prendere i sei punti in un certo ordine, abbia la proprietà che le coppie di lati opposti BC' e $B'C$, CA' e $C'A$, AB' ed $A'B$ concorrano in tre punti P, Q, R di una retta.

Pei punti $AB'CA'B$ passa una (ed una sola) conica, la quale incontrerà la retta AC' in un certo punto X. Allora $AB'CA'BX$ sarà un esagono inscritto, e le coppie di lati opposti $B'C$ e BX, XA ossia $C'A$ e CA', $A'B$ ed AB' si segheranno in tre punti in linea retta, il secondo e il terzo de' quali sono Q, R; il primo è dunque l'intersezione di QR con $B'C$ ossia P. Per P passa adunque sì la BX, sì la BC'; dunque le rette indefinite BX e BC' coincidono. Di qui risulta che il punto X è situato e nella AC' e nella BC'; esso è dunque precisamente il punto C'; c.d.d.

d) Sei punti, secondo i diversi ordini ne' quali vengono connessi con linee rette, dànno sessanta esagoni (semplici). Dal ragionamento or fatto risulta che, se uno qualunque di questi esagoni ha la proprietà che le coppie di lati opposti si seghino in tre punti in linea retta, i sei punti appartengono ad una stessa conica, epperò la medesima proprietà compete a tutti gli altri esagoni [1].

e) Considerazioni correlative a quelle ora esposte in *b*), *c*), *d*) si potrebbero fare per il sistema di sei rette, rispetto al teorema di Brianchon.

[1] Steiner, *l. c.*, p. 311.

118. Consideriamo i due triangoli, l'uno de' quali è formato dal primo, terzo e quinto lato, l'altro dal secondo, quarto e sesto lato di un esagono inscritto $AB'CA'BC'$ (fig. 85ª). Assumendo come corrispondenti i lati BC' e $B'C$, CA' e $C'A$, AB' ed $A'B$, il teorema di Pascal dice che questi si segano in tre punti di una stessa retta; dunque (N° 13) i due triangoli sono omologici. Ne segue che il teorema di Pascal può enunciarsi così:

Se due triangoli sono omologici, i punti ne' quali i lati dell'uno incontrano i lati non corrispondenti dell'altro sono situati in una stessa conica.

Analogamente, in un esagono circoscritto $ab'ca'bc'$ (fig. 84ª) si considerino i vertici di posto dispari ed i vertici di posto pari come vertici di due triangoli, ne' quali si assumano come corrispondenti i vertici bc' e $b'c$, ca' e $c'a$, ab' ed $a'b$. Il teorema di Brianchon dice che queste coppie di vertici sono allineate con uno stesso punto; dunque (N° 12) i due triangoli sono omologici, così che il detto teorema somministra l'enunciato che segue:

Se due triangoli sono omologici, le rette che congiungono i vertici dell'uno ai vertici non corrispondenti dell'altro sono tangenti di una stessa conica.

I due enunciati possono ancora riunirsi in un solo, così:

Se due triangoli sono omologici, i punti ne' quali i lati dell'uno segano i lati non corrispondenti dell'altro appartengono ad una conica; e le rette che dai vertici dell'uno vanno ai vertici non corrispondenti dell'altro toccano un'altra conica [1].

119. Ponendo mente alla fig. 85ª, nella quale si considerino i punti $AB'CA'B$ come dati e C' come variabile, il teorema di Pascal si può anche presentare così:

Se un triangolo $C'PQ$ si deforma in modo che i suoi lati PQ, PC', QC' ruotino attorno ai punti fissi R, B, A, mentre due vertici P, Q scorrano su due rette fisse CB', CA', il terzo vertice C' descrive una conica, che passa pei punti dati A, B, pel punto C comune alle rette date, pel punto B' comune alle AR, CB' e pel punto A' comune alle BR, CA' [2].

[1] Steiner, l. c, p. 452.

[2] Questo teorema fu dato da Maclaurin nel 1721. Cfr. le Transazioni filosofiche della Società reale di Londra per l'anno 1735 (a pag. 121 della traduzione francese,

Analogamente, il teorema di Brianchon si potrà foggiare come segue:

Se un triangolo $c'pq$ (fig. 84ª) si deforma in modo che i suoi vertici pq, pc', qc' si muovano sulle rette fisse r, b, a, mentre due lati p, q ruotino attorno ai punti fissi cb', ca', il terzo lato c' inviluppa una conica, che è toccata dalle rette date a, b, dalla congiungente c dei punti fissi, dalla retta b' che unisce i punti ar, cb', e dalla retta a' che dal punto br va al punto ca'.

120. Se nelle proposizioni del N° 116, a destra, supponiamo che una tangente sia la retta all'infinito, la conica sarà una parabola (N° 18, g); dunque

Una parabola è individuata da quattro tangenti;

Ossia (N° 116, b, a destra):

Vi è una sola parabola che tocchi quattro rette date.

a) Facendo la stessa ipotesi nel teorema N° 113, b), i punti all'infinito delle due tangenti, punteggiate projettive, saranno punti corrispondenti, giacchè la retta che li unisce è una tangente della curva. Dunque (N° 74):

Quantesivogliano tangenti di una parabola segano due tangenti fisse della medesima in punti che costituiscono due punteggiate simili; ossia:

Due tangenti fisse di una parabola sono divise da tutte le altre tangenti in parti proporzionali [1].

Le due tangenti fisse siano segate dalle altre ne' punti A ed A', B e B', C e C',... (fig. 86ª); e siano P, Q' i punti di contatto di quelle, così che il punto comune alle medesime si dovrà indicare con Q o con P', secondo che si consideri come punto dell'una o dell'altra. Avranno dunque luogo le uguaglianze

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\dots=\frac{BC}{B'C'}=\dots\frac{AP}{A'P'}=\frac{AQ}{A'Q'}=\dots=\frac{PQ}{P'Q'}.$$

b) Viceversa (N° 114, b), date (in un piano) due rette punteggiate simili, tutte le rette che congiungono cop-

ed. a Bologna 1741), e: Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (Bruxelles 1837), p. 150. Se il punto R si suppone all'infinito, il teorema diviene il lemma 20 di Newton, *Philosophiæ naturalis Principia mathematica,* lib. I (pag. 198 dell'ediz. Coloniæ 1760; la 1ª edizone è del 1686).

[1] Apollonii Pergæi, *Conicorum,* lib. III, 41.

pie di punti corrispondenti sono tangenti di una stessa parabola, che tocca le rette date ne' punti che corrispondono alla loro mutua intersezione.

Infatti, la retta all'infinito è in questo caso una tangente della conica, giacchè unisce i due punti all'infinito delle rette date, i quali sono punti corrispondenti (N° 73).

121. Nel teorema del N° 114, *a*), si supponga il punto P all'infinito, vale a dire il primo fascio formato da raggi paralleli. Alla retta QP (cioè alla retta parallela ai raggi del primo fascio e passante pel centro del secondo), considerata come raggio p' del secondo fascio, corrisponde nel primo la retta p, tangente in P: ora questa retta p può essere a distanza finita o a distanza infinita.

Nel 1° caso (fig. 87ª), la retta all'infinito è un raggio j del primo fascio, a cui corrisponderà nel secondo fascio un raggio j' diverso da p', epperò non passante per P; dunque la conica sarà un'iperbole (N° 18, *g*), i cui punti all'infinito sono $P \equiv pp'$ e jj'; la retta p è uno degli assintoti, e j' è parallela all'altro.

Nel 2° caso (fig. 88ª), la retta all'infinito è tangente in P alla conica, epperò questa è una parabola.

122. Se nel medesimo teorema del N° 114, *a*) si suppongono entrambi i punti P, Q a distanza infinita (fig. 89ª), ciascuno de' due fasci projettivi sarà formato da raggi paralleli; e la conica generata per mezzo di essi, dovendo passare pei centri P, Q, sarà un'iperbole (N° 18, *g*). Gli assintoti dell'iperbole sono le tangenti ne' suoi punti all'infinito [1]; epperò saranno que' raggi p, q' del primo e del secondo fascio che corrispondono alla retta all'infinito, considerata come raggio del secondo e del primo fascio, rispettivamente.

Secondo il teorema generale N° 113, *b*), gli assintoti dell'iperbole sono incontrati da tutte le altre tangenti in punti costituenti due punteggiate projettive, nelle quali i punti di contatto, che qui sono all'infinito, corrispondono al punto O ove si segano gli assintoti. Dunque l'equazione $JM \, . \, I'M' =$ cost.ᵉ dei Nⁱ 59, 83 diviene nel caso nostro $OM \, . \, OM' =$ cost.ᵉ, dove M, M' siano le intersezioni di una tangente qualunque cogli assintoti. Concludiamo pertanto:

[1] Desargues, *l. c.*, p. 210; — Newton, *l. c.*, scolio alla prop. 27.

Il prodotto dei segmenti fatti da una tangente qualunque dell'iperbole sui due assintoti, contati a partire dal punto d'incontro di queste due rette, ha un valore costante.

Ed anche si può dire:

L'area del triangolo racchiuso da una tangente qualunque dell'iperbole e dagli assintoti è costante ([1]).

123. Applichiamo il teorema del N° 113, *b*) anche al caso di due tangenti fisse parallele, segate da una tangente variabile in M, M'. Nelle punteggiate projettive generate da questi punti, al punto (all'infinito) comune alle due tangenti fisse corrispondono i loro punti di contatto; designandoli pertanto con J, I', avremo in virtù del citato N° 59, l'uguaglianza $JM \,.\, I'M' =$ cost.^{e}. Dunque:

Il prodotto dei segmenti che una tangente variabile determina in due tangenti parallele fisse, a partire dai loro punti di contatto, è costante ([2]).

§ 15. Costruzioni ed esercizi.

124. Per mezzo de' teoremi correlativi del N° 117 si risolvono i problemi seguenti:

Date cinque rette $ab'ca'b$ tangenti di una conica, costruire la tangente che ad essa si può condurre da un punto H, dato in una delle tangenti date, a (fig. 90^a).

Indicata con c' la tangente richiesta, l'esagono $ab'ca'bc'$ avrà la proprietà espressa nel teorema di Brianchon. Conducansi la diagonale r che unisce i due vertici opposti ab' ed $a'b$, e la diagonale q che unisce i due vertici opposti ca' e $c'a$ (dove $c'a$ è il punto dato H). Pel punto qr dovrà passare anche la diagonale che unisce gli altri due vertici opposti bc' e $b'c$.

Dati cinque punti $AB'CA'B$ di una conica, trovare il punto comune ad essa e ad una retta data r, la quale passi per uno de' punti dati, A (fig. 91^a).

Indicato con C' il punto cercato, l'esagono $AB'CA'BC'$ avrà la proprietà espressa nel teorema di Pascal. Sia dunque R il punto comune alle AB', $A'B$ (due lati opposti dell'esagono); Q il punto comune alle CA', r (altri due lati opposti); la congiungente QR dovrà segare in uno stesso punto P gli altri due lati opposti $B'C$ e BC'. Dunque, se il punto P, co-

([1]) Apollonio, *l. c.*, III, 43. ([2]) Apollonio, *l. c.*, III, 42.

Dunque, se p è la congiungente dei punti qr e $b'c$, il punto pb congiunto col punto dato darà la retta domandata c'.

Se ora si dànno altre posizioni al punto dato H (purchè sia sempre in una delle tangenti conosciute), e ciascuna volta si ripeta la costruzione che precede, si otterranno quante tangenti si vogliono della conica. Dunque, il teorema di Brianchon serve a costruire per tangenti la conica individuata da cinque tangenti date [1].

mune alle $B'C$, QR, vien congiunto a B, la BP segherà r nel punto cercato C'.

Se ora si dànno altre posizioni alla retta data (purchè passi sempre per uno de' punti conosciuti della conica), e ciascuna volta si ripeta la costruzione che precede, si otterranno quanti punti si vogliono della conica. Dunque, il teorema di Pascal serve a costruire per punti la conica individuata da cinque punti dati [2].

125. Nel problema che precede, a destra, il punto B sia a distanza infinita. La conica sarà allora (in generale) un'iperbole, della quale si conoscono i punti $AB'CA'$, e la direzione di un assintoto; e si domanda la seconda intersezione con una retta data r passante per A (fig. 92ª).

La soluzione si ricava da quella del problema suddetto, portando il punto B all'infinito nella direzione data. Vale a dire: congiungasi il punto R comune alla AB' ed alla retta condotta per A' nella direzione data col punto Q comune alle r, $A'C$; poi pel punto P comune alle QR, $B'C$ si conduca una retta parallela ad $A'R$, la quale segherà r nel punto cercato C'.

a) Se invece è all'infinito il punto A, il problema diviene il seguente: Dati quattro punti $B'CA'B$ e la direzione d'un assintoto di un'iperbole, trovare l'intersezione di questa con una data retta r, parallela all'assintoto (fig. 93ª).

Soluzione. — Congiungasi il punto R comune alla $A'B$ ed alla retta condotta per B' nella direzione data, col punto Q comune alla $A'C$ ed alla retta data; poi si unisca il punto B col punto P comune alle QR, $B'C$; la BP segherà la retta data nel punto cercato C'.

b) Siano all'infinito i punti A', B; avremo allora il problema che segue: Dati tre punti $AB'C$ e le direzioni degli assintoti d'un'iperbole, trovare il secondo punto comune alla curva e ad una data retta r passante per A (fig. 94ª).

Soluzione. — Pel punto Q comune ad r ed alla retta condotta per C nella direzione del primo assintoto si tiri la parallela alla AB', la quale seghi in P la $B'C$; per P si tiri la parallela al secondo assintoto; questa segherà r nel punto cercato C'.

c) Supponendo invece all'infinito i punti A, B', il problema risoluto dalla esposta costruzione sarà quest'altro:

[1] Brianchon, *l. c.*, p. 38; — Poncelet, *l. c.*, N° 209.
[2] Newton, *l. c.*, prop. 22; — Maclaurin, *De linearum geometricarum proprietatibus generalibus* (Londini 1748), § 44.

Di un'iperbole si conoscono tre punti $CA'B$ e le direzioni dei due assintoti; si domanda l'intersezione della curva con una data retta r, parallela al primo assintoto (fig. 95ª).

Soluzione. — Per Q, punto comune alle r, CA' si conduca la parallela ad $A'B$, la quale seghi in P la parallela al secondo assintoto tirata per C; la BP segherà la retta data nel punto cercato C'.

d) E ancora suppongansi a distanza finita i punti $B'CA'B$, e all'infinito tutta la retta AC'. Avremo allora il problema:

Conoscendo quattro punti $B'CA'B$ di un'iperbole e la direzione di un assintoto, trovare la direzione dell'altro assintoto (fig. 96ª).

Soluzione. — Da R punto comune alla $A'B$ ed alla retta condotta per B' nella direzione data, si guidi la parallela alla CA', che seghi in P la $B'C$. La BP avrà la direzione richiesta.

Tutti questi problemi non sono che casi particolari di quello del N° 124 a destra; e sarà bene che lo studente si eserciti a ricavare dalla costruzione generale le costruzioni pei casi particolari, la qual cosa richiede soltanto d'aver presente che il congiungere un punto dato a distanza finita con un altro situato all'infinito in una direzione data equivale a condurre pel primo punto la parallela alla direzione data.

126. In modo analogo, consideriamo: i casi particolari del problema del N° 124, a sinistra, supponendo che qualche elemento si allontani all'infinito.

Supponiamo in primo luogo che il punto ac' sia all'infinito. Il problema da risolvere allora sarà:

Date cinque tangenti $ab'ca'b$ di una conica, costruire la tangente parallela ad una delle date, per esempio ad a (fig. 97ª).

Soluzione. — Si costruiscano: la retta r che unisce i punti ab', $a'b$; la retta q che passa pel punto $a'c$ ed è parallela ad a; e la retta p che congiunge i punti qr, $b'c$; la tangente cercata c' passerà pel punto pb.

Da un punto qualunque del piano si possono condurre ad una conica tutt'al più due tangenti (N° 18, *f*); da un punto di una tangente data si può condurre soltanto un'altra tangente. Dunque se la conica è una parabola, due tangenti non possono mai essere parallele.

a) Sia all'infinito la retta b; avremo il problema:

Date quattro tangenti $ab'ca'$ di una parabola, costruire la tangente che passa per un punto dato H di a (fig. 98ª).

Soluzione. — Si costruiscano: la retta r che passa pel punto ab' ed è parallela ad a'; la retta q che congiunge il punto dato H col punto $a'c$; e la retta p che unisce i punti qr, $b'c$. La tangente cercata sarà parallela alla p.

b) Se è all'infinito la retta a, abbiamo il problema:

Date quattro tangenti $b'ca'b$ di una parabola, costruire la tangente che ha una direzione data (fig. 99ª).

Soluzione. — Si costruiscano: la retta r che passa pel punto $a'b$ ed è parallela a b'; la retta q che passa pel punto $a'c$ ed ha la direzione data;

e la retta p che unisce i punti $b'c$, qr. La tangente cercata passerà pel punto pb.

c) Variando nel penultimo problema la posizione del punto dato su a, o nell'ultimo la direzione data, si giunge alla risoluzione del problema:

Costruire le tangenti della parabola determinata da quattro tangenti date.

§ 16. Corollari dei teoremi di Pascal e Brianchon.

127. Già abbiamo addotto parecchie proposizioni e costruzioni (N° 124 e seg.) che sono immediate conseguenze de' teoremi di Pascal e Brianchon, nascenti dal supporre qualche elemento allontanato a distanza infinita. Altri corollari si ottengono se si imagina che due de' sei punti o delle sei tangenti siano infinitamente vicine [1].

Se $AB'CA'BC'$ sono sei punti di una conica, il teorema di Pascal dice in sostanza che sono projettivi per es. i fasci $A(A'B'CC')$, $B(A'B'CC')$. In essi, al raggio AB del primo corrisponde la retta che tocca la conica in B; sicchè si può invece dire essere projettivo il gruppo delle quattro rette

$$AA',\ AB',\ AC,\ AB$$

al gruppo formato dalle

$$BA',\ BB',\ BC$$

e dalla tangente in B; e ciò equivale manifestamente a supporre che il punto C', dianzi preso ad arbitrio nella curva, sia ora infinitamente vicino a B. L'esagono inscritto si muta adunque nella figura costituita dal pentagono inscritto $AB'CA'B$ e dalla tangente b nel vertice B (fig. 100ª); ond'è che il teorema di Pascal diviene:

Se un pentagono ($AB'CA'B$) è inscritto in una conica, il punto comune a due lati non consecutivi (AB', $A'B$), il punto comune a due altri lati non consecutivi (AB, CA'), ed il punto ove il quinto lato ($B'C$) incontra la tangente nel vertice opposto (B) sono in linea retta.

[1] Carnot, l. c., pag. 455–6.

Possiamo ricavare questo corollario anche dalla costruzione (Nº 66, a destra) di due fasci projettivi. Date le coppie AA' e BA', AC e BC, AB' e BB' di raggi corrispondenti, si seghino i due fasci colle trasversali CA', CB', e sia R il punto di concorso delle $A'B$, AB'; allora due raggi corrispondenti qualisivogliano de' fasci A, B dovranno rispettivamente segare le trasversali CA', CB' in due punti allineati con R. Laonde, per ottenere quel raggio del secondo fascio che corrisponde ad AB, vale a dire la tangente in B, basta congiungere R col punto Q comune alle CA', AB; la retta domandata sarà quella che da B va al punto P intersezione delle CB', QR. Questa costruzione coincide appunto col corollario sopra enunciato.

128. Questo corollario serve a risolvere i due problemi seguenti:

1° Dati cinque punti A, B', C, A', B di una conica, costruire la tangente in uno de' punti dati, B (fig. 100ª).

Soluzione. — Congiungasi il punto Q comune alle AB, CA' col punto R comune alle AB', $A'B$; e sia P l'intersezione delle $B'C$, QR. Sarà BP la tangente domandata (¹).

Casi particolari. — (Sia uno de' punti $AB'CA'$ all'infinito). Conoscendosi quattro punti di un'iperbole e la direzione di un assintoto, costruire la tangente in uno de' punti dati.

(Sia B all'infinito). Conoscendosi quattro punti di un'iperbole e la direzione di un assintoto, costruire quest'assintoto.

(Siano all'infinito due de' punti $AB'CA'$). Conoscendosi tre punti di un'iperbole e le direzioni degli assintoti, costruire la tangente in uno de' punti dati.

(Siano all'infinito B ed uno degli altri punti). Conoscendosi tre punti di un'iperbole e le direzioni degli assintoti, costruire un assintoto.

2° Dati quattro punti $ABA'C$ di una conica e la tangente in B, costruire la conica per punti; per es. trovare quel punto che la curva ha comune con una data retta r passante per A (fig. 100ª).

Soluzione. — Sia R il punto comune alle r, $A'B$; Q il punto ove AB sega CA'; e P il punto comune alla QR ed alla tangente data. Il punto cercato sarà quello in cui la CP sega la retta data.

Supponendo all'infinito uno o due de' punti $AA'C$, ovvero il punto A e la retta r, ovvero il punto B, ovvero il punto B ed uno degli altri punti, ovvero il punto B e la tangente data, si hanno i seguenti casi particolari:

Costruire per punti l'iperbole della quale si conoscano tre punti, la tangente in uno di questi e la direzione di un assintoto; ovvero due punti, la tangente in uno di questi e le direzioni degli assintoti; ovvero tre punti ed un assintoto; ovvero due punti, un assintoto e la direzione dell'altro;

Costruire la parabola, della quale si conoscano tre punti a distanza finita e la direzione delle rette concorrenti nel punto all'infinito.

(¹) Maclaurin, *l. c.*, § 40.

129. Tornando ora all'esagono $AB'CA'BC'$ inscritto in una conica, si supponga che non solo C sia infinitamente vicino a B, ma anche B' e C siano infinitamente vicini; la figura allora ci presenterà un quadrangolo inscritto $AB'A'B$ e le tangenti ne' vertici B, B' (fig. 101ª), e il teorema di Pascal diviene:

Se un quadrangolo è inscritto in una conica, il punto comune alle tangenti in due vertici opposti è in linea retta coi due punti di concorso delle coppie di lati opposti [1].

Ciò coincide con una proprietà già osservata altrove (N° 67, a destra). Infatti, se si considerino i fasci projettivi i cui raggi corrispondenti sono BA e $B'A$, BA' e $B'A'$,..., la retta che dal punto Q comune alle BA e $B'A'$ va al punto R comune alle $B'A$, BA' dee passare per l'intersezione P de' raggi che corrispondono alla congiungente de' due centri B, B'.

130. Il corollario che precede serve a risolvere i seguenti problemi:

1° Dati quattro punti $AB'AB'$ di una conica e la tangente BP in B, costruire la tangente in B' (fig. 101ª).

Soluzione. — Siano: Q il punto comune alle AB, $A'B'$; R il punto comune alle AB', $A'B$; e P il punto comune alla tangente data ed alla QR. La tangente domandata sarà $B'P$ [2].

Supponendo all'infinito alcuno de' punti dati o la retta data, si ottengono le soluzioni de' problemi speciali che seguono:

Costruire la tangente in un punto dato di un'iperbole della quale si conoscano: o due altri punti, la tangente in uno di questi e la direzione di un assintoto; o un altro punto, la tangente in esso e le direzioni degli assintoti; ovvero due altri punti e un assintoto; ovvero un altro punto, un assintoto e la direzione dell'altro assintoto;

Costruire l'assintoto dato in direzione di un'iperbole della quale siano inoltre dati tre punti e la tangente in uno di essi, ovvero due punti, la tangente in uno di essi e la direzione del secondo assintoto, ovvero due punti e il secondo assintoto;

Costruire la tangente in un punto dato di una parabola della quale si conoscano due altri punti a distanza finita e la direzione sulla quale è situato il punto all'infinito.

2° Costruire per punti la conica della quale siano dati tre punti ABB' e le tangenti BP, $B'P$; per es. costruire il punto in cui la curva è segata da una retta r condotta ad arbitrio per B (fig. 101ª *bis*).

Soluzione. — Congiungasi il punto P comune alle tangenti date col punto R dove r incontra la AB'; e sia Q l'intersezione delle AB, PR. La congiungente $B'Q$ segherà r nel punto cercato A'.

[1] Maclaurin, *l. c.*, § 36. [2] Maclaurin, *l. c.*, § 38.

Supponendo all'infinito alcuno de' punti ABB', o alcuna delle rette BP, $B'P$, r, si hanno le soluzioni de' seguenti casi particolari:

Costruire per punti l'iperbole della quale siano dati due punti colle rispettive tangenti e la direzione di un assintoto; ovvero due punti, la tangente in uno di essi e un assintoto; ovvero un punto colla rispettiva tangente, un assintoto e la direzione dell'altro; ovvero i due assintoti e un punto;

Costruire per punti la parabola della quale, oltre alla direzione delle rette concorrenti nel punto all'infinito, si conoscano due punti e la tangente in uno di questi.

131. Considerando, nello stesso quadrangolo $ABA'B'$ (fig. 101ª), gli altri due vertici opposti A ed A', anche le tangenti in essi si segheranno sulla retta che unisce il punto $(AB, A'B')$ col punto $(AB', A'B)$; dunque:

Se un quadrangolo è inscritto in una conica i punti ove si segano i lati opposti e i punti ove si segano le tangenti ne' vertici opposti sono quattro punti in linea retta.

132. Scriviamo ora C, D, E, G in luogo di A', B', R, Q (fig. 102ª). Nel quadrangolo inscritto $ABCD$ il punto comune alle tangenti in A e C, il punto comune alle tangenti in B e D, il punto comune ai lati AD, BC ed il punto comune ai lati AB, CD sono adunque in una stessa retta EG.

Gli stessi quattro punti A, B, C, D, presi in altro ordine formano due altri quadrangoli inscritti $ACDB$, $ACBD$. Dunque, se si applica l'ultimo teorema al quadrangolo inscritto $ACDB$, avremo che il punto comune alle tangenti in A e D, il punto comune alle tangenti in C e B, il punto comune ai lati AB, CD ed il punto comune ai lati AC, BD sono tutti in una medesima retta FG. Ed analogamente dal quadrangolo inscritto $ACBD$ si caverà che le tangenti in A e B, le tangenti in C e D, i lati AD, CB, ed i lati AC, BD si segano in quattro punti di una medesima retta EF (1).

Le tre rette così ottenute, EG, FG, EF, sono i lati del triangolo diagonale (N° 30, b) del quadrangolo completo i cui vertici sono i quattro punti dati; e siccome le medesime rette contengono anche le intersezioni delle coppie di tangenti nei detti punti, così sono esse le diagonali del quadrilatero completo costituito dalle quattro tangenti; ossia:

(1) Maclaurin, *l. c.*, § 37. — Carnot, *l. c.*, pag. 453-4.

Il quadrilatero completo formato da quattro tangenti di una conica e il quadrangolo completo formato dai quattro punti di contatto hanno il medesimo triangolo diagonale.

Nella figura 102ª, *abcd* sono le quattro tangenti, *ABCD* i punti di contatto, *EFG* il triangolo diagonale.

133. Nel quadrilatero (completo) circoscritto *abcd* la diagonale che ha i termini nei punti *ac*, *bd* incontra le altre due diagonali in *E*, *G*; questi quattro punti sono perciò armonici (N° 48). Correlativamente: i due lati opposti del quadrangolo (completo) inscritto *ABCD*, che concorrono in *F*, sono separati armonicamente mediante le rette che vanno agli altri due punti diagonali *E*, *G* (N° 49). Si può adunque enunciare la proposizione che segue (fig. 102ª):

Quando un quadrilatero (semplice) inscritto (*ABCD*) ha per vertici consecutivi i punti di contatto consecutivi d'un quadrilatero (semplice) circoscritto (*abcd*): 1° le diagonali dei due quadrilateri passano per uno stesso punto (*F*) e formano un gruppo armonico; 2° i punti di concorso delle coppie di lati opposti dei due quadrilateri sono in linea retta (*EG*) e separati armonicamente; 3° le diagonali del quadrilatero circoscritto passano pei punti di concorso dei lati opposti del quadrilatero inscritto (1).

134. Mediante il teorema del N° 132, se sono date quattro tangenti *abcd* di una conica (fig. 102ª) ed uno dei punti di contatto *A*, si trovano subito gli altri tre; e così pure, se sono dati quattro punti *ABCD* e la tangente *a* in uno di essi, si costruiscono le tangenti negli altri tre (2).

Soluzione. — Si costruisca il triangolo diagonale *EFG* del quadrilatero completo *abcd*; le *AG*, *AF*, *AE* incontreranno rispettivamente le *b*, *c*, *d* in *B*, *C*, *D*.

Si costruisca il triangolo diagonale *efg* del quadrangolo completo *ABCD*; i punti *ag*, *af*, *ae* apparterranno rispettivamente alle tangenti domandate *b*, *c*, *d*.

135. Se consideriamo le quattro rette *abcd* come formanti un quadrilatero (non completo) circoscritto alla conica, possiamo dare

(1) Chasles, *Sect. coniques*, N° 121.

(2) Maclaurin, *l. c.*, § 38 e 39.

al teorema del N° 132 il seguente enunciato, del resto già compreso in quello del N° 133 (1):

Se un quadrilatero è circoscritto ad una conica, le rette che uniscono i punti di contatto di due lati opposti passano pel punto comune alle diagonali (fig. 103ª).

a) Questa proprietà coincide con una già dimostrata a proposito di due punteggiate projettive (N° 67, a sinistra). Infatti, se consideriamo le punteggiate projettive a, c nelle quali sono punti corrispondenti ab e cb, ad e cd, ..., la retta che congiunge i punti ab e cd e quella che congiunge i punti cb e ad si segano sulla retta che unisce i punti corrispondenti al punto ac, cioè sulla retta che unisce i punti di contatto di a e c.

b) Se la conica è un'iperbole, considerando il quadrilatero formato dagli assintoti e da due tangenti qualisivogliano, la proposizione ora enunciata dice che le diagonali sono parallele alla corda che unisce i punti di contatto delle due tangenti (2).

136. Il teorema che precede serve alla risoluzione del problema:

Costruire per tangenti la conica della quale siano date tre tangenti a, b, c e due punti di contatto A, C; per esempio condurre una nuova tangente da un punto H dato in a (fig. 103ª).

Soluzione. — Si congiunga il punto ab con quello che è comune alla AC ed alla $H(bc)$; la congiungente incontrerà c in un punto che riunito ad H darà la tangente domandata d.

Supponendo all'infinito alcuno de' punti A, C o alcuna delle tangenti date, si hanno le soluzioni per diversi casi particolari:

Costruire per tangenti l'iperbole della quale sono dati un assintoto, due tangenti ed un punto di contatto; ovvero i due assintoti ed una tangente;

Costruire per tangenti la parabola della quale si conoscono il punto all'infinito, due tangenti ed un punto di contatto; ovvero due tangenti e i loro punti di contatto.

137. Se nel teorema di Pascal si suppongono infinitamente vicini A e B', C ed A', B e C', avremo (fig. 104ª) un triangolo inscritto ABC e le tangenti ne' vertici; dunque:

Se un triangolo è inscritto in una conica, le tangenti ne' vertici incontrano i lati rispettivamente opposti in tre punti in linea retta.

138. Questo teorema risolve il problema:

Dati tre punti A, B, C di una conica e le tangenti in due di essi A, B, trovare la tangente nel terzo (fig. 104ª).

(1) Newton, *l. c.*, cor. 2° al lemma 24.
(2) Apollonio, *l. c.*, III, 44.

Soluzione. — Le tangenti date incontrino rispettivamente BC, CA in P, Q; e la PQ incontri AB in R; sarà CR la tangente domandata.

Sono casi particolari di questo problema i seguenti:

Dati due punti A, B di un'iperbole, le tangenti in essi punti e la direzione di un assintoto, costruire questo assintoto.

Di un'iperbole si conoscono un assintoto, un punto A colla relativa tangente e la direzione dell'altro assintoto; costruire il secondo assintoto.

Di un'iperbole si conoscono i due assintoti ed un punto C; costruire la tangente in C.

Di una parabola si conoscono due punti A, C, la tangente in A, e la direzione delle rette concorrenti nel punto all'infinito; costruire la tangente in C.

139. Il triangolo inscritto ABC e il triangolo DEF formato dalle tangenti (fig. 104ª) hanno adunque la proprietà che le coppie de' loro lati BC ed EF, CA ed FD, AB e DE si segano in tre punti d'una retta. Perciò i due triangoli sono omologici, cioè (N° 13) le rette AD, BE, CF, che congiungono i vertici, passeranno per uno stesso punto O. Ossia:

Se un triangolo è circoscritto ad una conica, le rette che dai vertici vanno ai punti di contatto dei lati rispettivamente opposti concorrono in un punto.

140. Questo teorema risolve il problema:

Date tre tangenti di una conica e due punti di contatto, trovare il terzo.

Soluzione. — Sia DEF (fig. 104ª) il triangolo circoscritto formato dalle tangenti date; ed A, B i punti di contatto di EF, FD. Le AD, BE concorrano in O; la FO segherà DE nel punto domandato C.

Casi particolari: Date due tangenti e un assintoto di un'iperbole, oltre al punto di contatto di una tangente, costruire il punto di contatto dell'altra tangente.

Dati i due assintoti e una tangente di un'iperbole, costruire il punto di contatto di questa tangente.

Date due tangenti e i punti di contatto di una parabola, costruire la direzione delle rette concorrenti nel punto all'infinito.

Date due tangenti, il punto di contatto di una di esse e il punto all'infinito di una parabola, costruire il punto di contatto dell'altra tangente.

141. Come dal teorema di Pascal si sono ricavati teoremi speciali, risguardanti il pentagono, il quadrangolo ed il triangolo inscritto, così, con un procedimento affatto analogo, si possono dedurre dal teorema di Brianchon le proposizioni correlative, concernenti il pentagono, il quadrilatero ed il triangolo circoscritto.

Infatti, se dalle sei tangenti $ab'ca'bc'$, formanti l'esagono circo-

scritto (N° 117, a sinistra), se ne suppongono due, per es. *b* e *c'*, infinitamente vicine, siccome una tangente incontra nel suo punto di contatto la tangente immediatamente successiva (N[i] 110, 113), così l'esagono circoscritto si muterà nella figura costituita dal pentagono circoscritto *ab'ca'b* e dal punto di contatto del lato *b* (fig. 105ª). Il teorema di Brianchon dà allora:

Se un pentagono è circoscritto ad una conica, due diagonali congiungenti due coppie distinte di vertici e la retta che unisce il quinto vertice al punto di contatto del lato opposto, concorrono in uno stesso punto.

a) Questo teorema coincide con una proprietà delle punteggiate projettive altrove già osservata (N° 66, a destra). Abbiansi infatti nelle rette *a*, *b* le punteggiate projettive determinate dalle seganti *a'*, *b'*, *c*; se la prima punteggiata vien projettata dal punto *ca'* e la seconda dal punto *cb'*, si hanno due fasci prospettivi la cui comune sezione è la retta *r* che unisce i punti *ab'*, *a'b*. Dunque, se si domanda il punto della seconda punteggiata, che corrisponde al punto *ab* della prima, vale a dire il punto di contatto della tangente *b*, basta tirare la retta *q* che da *ca'* projetta il punto *ab*, e quindi la retta *p* pei punti *cb'*, *qr*; il punto *pb* sarà il domandato.

b) La proprietà ora ottenuta del pentagono circoscritto dà il mezzo di risolvere i problemi seguenti:

1° Date cinque tangenti di una conica costruire il punto di contatto di una qualunque fra esse (1).

Caso particolare: Date quattro tangenti di una parabola, trovare i punti di contatto e il punto all'infinito.

2° Costruire per tangenti la conica della quale siano date quattro tangenti ed un punto di contatto.

Casi particolari: Costruire per tangenti l'iperbole della quale siano date tre tangenti ed un assintoto;

Costruire per tangenti la parabola della quale siano date tre tangenti e il punto all'infinito, ovvero tre tangenti ed un punto di contatto.

c) I corollari del teorema di Brianchon rispetto al quadrilatero e al triangolo inscritto non sono altro che i teoremi dei N[i] 135 e 139, e sono rispettivamente correlativi ai teoremi de' N[i] 129, 137; come sono correlativi fra loro quelli dei N[i] 127 e 141.

Sarà un utilissimo esercizio per lo studioso quello di risolvere da sè i problemi enunciati nel presente §; le costruzioni rientrano tutte in due sole, fra loro correlative, in quelle cioè che sono immediatamente somministrate dai teoremi di Pascal e Brianchon.

(1) Maclaurin, *l. c.*, § 41.

142. I corollari dei teoremi di Pascal e Brianchon mettono in evidenza che, come una conica è individuata da cinque punti o da cinque tangenti, così è pure individuata da quattro punti e dalla tangente in uno di essi, da quattro tangenti e da un punto di contatto, da tre punti e dalle tangenti in due di essi, da tre tangenti e da due punti di contatto. Donde segue che: 1° infinite coniche possono passare per tre punti dati e in uno di essi toccare una retta data, o passare per due punti dati e in essi toccare rette date; ma due qualunque di tali coniche non possono avere alcun altro punto comune; 2° infinite coniche possono toccare una retta data in un punto dato e due altre rette date, ovvero due rette date in punti dati; e due qualunque di tali coniche non hanno alcun'altra tangente comune.

Dunque, se due coniche toccano una retta data in uno stesso punto (cioè se le due coniche si toccano fra loro in questo punto), esse non possono avere inoltre più di due punti e più di due tangenti comuni; e se due coniche toccano due rette date in punti dati (cioè se le due coniche si toccano fra loro in due punti), esse non possono avere altri punti o altre tangenti comuni.

Si può anche dire che, se due coniche toccano una retta a in uno stesso punto A, questo equivale a due punti d'intersezione, e la retta a equivale a due tangenti comuni.

§ 17. Teorema di Desargues.

143. Un quadrangolo $QRST$ (figura 106ª) sia inscritto in una conica, ed una trasversale arbitraria s seghi i lati QT, RS, QR, TS nei punti A, A', B, B' e la conica nei punti P, P'.

Sono projettivi (N° 113, a) i due gruppi di raggi che da Q e da S projettano i punti P, R, P', T della conica, epperò projettivi anche i due gruppi di punti $PBP'A$, $PA'P'B'$ ne' quali i detti raggi sono segati dalla trasversale s. Dunque (N° 56) sono projettivi i gruppi $PBP'A$, $P'B'PA'$, vale a dire (N° 94)

$$PP' \,.\, AA' \,.\, BB'$$

sono tre coppie di punti in involuzione. Si ha così il teorema di Desargues [1]:

Un quadrilatero $qrst$ (fig. 107ª) sia circoscritto ad una conica; e da un punto arbitrario S si tirino le rette a, a', b, b' ai vertici qt, rs, qr, ts del quadrilatero e le tangenti p, p' alla conica.

Sono projettivi (N° 113, b) i due gruppi di punti ne' quali la q e la s segano le tangenti p, r, p', t della conica, epperò projettivi anche i due gruppi di raggi $pbp'a$, $pa'p'b'$ che projettano i detti punti da S. Dunque (N° 56) sono projettivi i gruppi $pbp'a$, $p'b'pa'$ vale a dire (N° 94)

$$pp' \,.\, aa' \,.\, bb'$$

sono tre coppie di raggi in involuzione. Si ha così il teorema (correlativo di quello di Desargues):

[1] *L. c.*, p. 171, 176.

Una trasversale arbitraria incontra una conica e i lati opposti di un quadrangolo inscritto in tre coppie di punti conjugati in involuzione.

144. Questo teorema può servire, al paro di quello di Pascal (N° 117, a destra), a costruire per punti la conica della quale siano dati cinque punti $PQRST$ (fig. 106ª). Infatti, conducasi per P una trasversale arbitraria s, che seghi le QT, RS, QR, TS in A, A', B, B'; indi si costruisca il punto P' conjugato di P nell'involuzione determinata dalle coppie AA', BB' (N° 102), e sarà P' un punto della conica da descriversi.

145. All'involuzione determinata dai punti AA', BB' appartiene anche (N° 101, a sinistra) la coppia CC' de' punti in cui la trasversale sega le diagonali QS, RT del quadrangolo inscritto.

Inoltre, bastando i punti AA', BB' a determinare l'involuzione, a questa appartengono i punti conjugati PP', qualunque sia la conica circoscritta al quadrangolo $QRST$; dunque:

Tutte le coniche circoscritte ad uno stesso quadrangolo sono incontrate da una trasversale arbitraria in coppie di punti in involuzione.

Se l'involuzione ha due punti doppi, ciascun di questi terrà luogo di due intersezioni PP' coincidenti (o infinitamente vicine), vale a dire, sarà il punto di contatto fra la trasversale ed una conica circoscritta al quadrangolo.

Le due tangenti condotte da un punto arbitrario ad una conica e le rette condotte dallo stesso punto ai vertici opposti di un quadrilatero circoscritto formano tre coppie di raggi conjugati in involuzione.

Questo teorema può servire, come quello di Brianchon (N° 117, a sinistra), a costruire per tangenti la conica della quale siano date cinque tangenti $pqrst$ (fig. 107ª). Infatti, prendasi in p un punto arbitrario S, dal quale si tirino i raggi a, a', b, b' ai punti qt, rs, qr, ts; indi si costruisca (N° 102) il raggio p' conjugato di p nell'involuzione determinata dalle coppie aa', bb'; e sarà p' una tangente della conica da costruirsi.

All'involuzione determinata dai raggi aa', bb' appartiene anche (N° 101, a destra) la coppia cc' de' raggi che projettano da S i punti $qsrt$ di concorso de' lati opposti del quadrilatero circoscritto.

Inoltre, bastando i raggi aa', bb' a determinare l'involuzione, a questa appartengono i raggi conjugati pp', qualunque sia la conica inscritta nel quadrilatero $qrst$; dunque:

Le coppie di tangenti tirate da un punto arbitrario alle coniche inscritte in uno stesso quadrilatero formano un'involuzione.

Se l'involuzione ha due raggi doppi, ciascuno di questi farà le veci di due tangenti pp' coincidenti (o infinitamente vicine), vale a dire sarà tangente in S ad una conica inscritta nel quadrilatero.

Dunque, o vi sono due coniche passanti per quattro punti dati $QRST$, e tangenti ad una retta data s (che non passi per alcuno de' punti dati), o non vi è alcuna conica che soddisfaccia a tali condizioni.

146. Di sei punti $AA' . BB' . PP'$ accoppiati in involuzione, se cinque sono dati, il sesto è individuato (N° 102). Perciò se nella fig. 106ª supponiamo data la conica, e variabile il quadrangolo, in modo che i punti $AA'B$ siano fissi, anche il punto B' resterà invariabile; dunque:

Se un quadrangolo, senza mai cessare d'essere inscritto in una conica, si deforma in modo che tre de' suoi lati ruotino intorno a tre punti fissi in linea retta, anche il quarto lato passerà per un quarto punto fisso della medesima retta.

Dunque, o vi sono due coniche tangenti a quattro rette date $qrst$ e passanti per un punto dato S (non situato in alcuna delle rette date), o non vi è alcuna conica che soddisfaccia a queste condizioni.

Di sei raggi $aa' . bb' . cc'$ accoppiati in involuzione, se cinque sono dati, il sesto è individuato (N° 102). Perciò se nella fig. 107ª supponiamo data la conica e variabile il quadrilatero, in modo che i raggi $a\,a'b$ siano fissi, anche il raggio b' resterà invariabile; dunque:

Se un quadrilatero, senza mai cessare d'essere circoscritto ad una conica, si deforma in modo che tre de' suoi vertici corrano su tre rette fisse uscenti da uno stesso punto, anche il quarto vertice si muoverà sopra una retta fissa uscente da quel punto.

a) Lo stesso teorema (a sinistra) ha luogo per un poligono qualunque inscritto, di un numero pari di lati. Sia il poligono inscritto di $2n$ lati, e si deformi per modo che i suoi primi $2n-1$ lati passino ordinatamente per altrettanti punti fissi d'una retta s (fig. 108ª). Dal 1° vertice conducansi le diagonali al 4° vertice, al 6°, all'8°,..., all'antipenultimo, onde il poligono riuscirà diviso in $n-1$ quadrangoli semplici. Nel primo di questi quadrangoli, i primi tre lati (primi tre lati del poligono) passano per tre punti fissi di s, dunque anche il quarto lato (1ª diagonale del poligono) passerà per un punto fisso di s. Nel secondo quadrangolo, i primi tre lati (la 1ª diagonale e i lati 4° e 5° del poligono) passano per tre punti fissi di s, dunque anche il quarto lato (2ª diagonale del poligono) passerà per un punto fisso di s. Continuando in questo modo si giungerà all'ultimo quadrangolo e si troverà che il quarto lato di questo quadrangolo, ossia il $2n$-esimo lato del poligono, passa anch'esso per un punto fisso di s. Dunque:

Se un poligono d'ordine pari $2n$, senza cessar mai

d'essere inscritto in una conica data, si deforma per modo che i suoi lati, meno uno, passino per altrettanti punti fissi in linea retta, anche l'ultimo lato passerà per un punto fisso della medesima retta (1).

b) Se dal punto fisso intorno al quale gira l'ultimo lato si possono condurre tangenti alla conica, e ciascuna di esse si prenda come posizione dell'ultimo lato, i due vertici situati in questo lato riusciranno coincidenti, cioè il poligono non avrà più che $2n-1$ vertici. Il punto di contatto di ciascuna delle due tangenti sarà dunque il vertice di un poligono d'ordine $2n-1$ inscritto nella conica, i cui lati passano per i $2n-1$ punti dati.

c) Il giovane studioso potrà per esercizio dimostrare il teorema correlativo:

Se un poligono d'ordine pari $2n$, senza mai cessare d'essere circoscritto ad una conica data, si deforma in modo che i suoi vertici, meno uno, corrano su altrettanti raggi fissi uscenti da uno stesso centro, anche l'ultimo vertice si muoverà sopra un raggio fisso uscente da quel centro (fig. 109ª).

d) Se quest'ultimo raggio sega la conica in due punti, e in ciascuno di questi si conduca la tangente, questa sarà il lato di un poligono d'ordine $2n-1$ circoscritto alla conica, ed avente i suoi vertici nelle $2n-1$ rette date.

147. Supponiamo i punti S, T infinitamente vicini sulla conica (fig. 110ª), ossia la retta ST tangente in S; il quadrangolo $QRST$ diviene allora un triangolo inscritto QRS, e dal teorema di Desargues si ha:

Se un triangolo QRS è inscritto in una conica, e se una trasversale s incontra la curva in due punti PP', due lati del triangolo nei punti AA', il terzo lato e la tangente nel vertice opposto nei punti BB', queste tre coppie di punti sono in involuzione.

Suppongansi le tangenti s, t infinitamente vicine (fig. 111ª), ossia la s tocchi la conica nel punto st; il quadrilatero $qrst$ diviene un triangolo circoscritto qrs, e dal teorema del N° 144 (a destra) si ha:

Se un triangolo qrs è circoscritto ad una conica, e se da un punto S si tirano alla conica le tangenti pp', a due vertici del triangolo le rette aa', al terzo vertice ed al punto di contatto del lato opposto le rette bb', queste tre coppie di rette sono in involuzione.

(1) Poncelet, *l. c.*, N° 513.

148. Di qui si cava una costruzione della tangente in S alla conica della quale sono dati i cinque punti $PP'QRS$. Infatti, siano A, A', B i punti in cui la retta PP' incontra le QS, RS, QR; si costruisca (N° 102) il punto B' conjugato di B nell'involuzione determinata dalle due coppie $AA'.PP'$; sarà $B'S$ la tangente domandata.

149. Suppongansi ora (fig. 112ª) anche i punti Q, R infinitamente vicini sulla conica, cioè sia QR tangente in Q; sicchè in luogo dei lati del quadrangolo inscritto $QRST$ si avranno le due tangenti nei punti Q, S e la corda di contatto QS [1]. Siccome le rette QT, RS ora coincidono in una sola retta QS, anche i punti A, A' coincideranno in un punto unico, che sarà per conseguenza uno degli elementi doppi dell'involuzione determinata dalle coppie PP', BB'. Il teorema di Desargues dà pertanto:

Se una trasversale sega una conica in due punti PP', due tangenti di essa in due altri punti BB', e la corda di contatto in A, questo sarà un punto doppio dell'involuzione determinata dalle coppie $PP'.BB'$.

Ossia:

Se una conica variabile tocca due rette date e passa per due punti dati PP', la corda di contatto passa per un punto fisso della retta PP'.

Se, oltre alla conica, variano anche le tangenti QU, SU, restando fissi i punti $PP'BB'$, la corda di contatto passerà ancora per l'uno o per l'altro

. Di qui si cava una costruzione del punto di contatto della tangente s colla conica della quale siano date le tangenti $pp'qrs$. Infatti, siano a, a', b i raggi che dal punto pp' projettano i punti qs, rs, qr; si costruisca (N° 102) il raggio b' conjugato di b nell'involuzione determinata dalle due coppie $aa'.pp'$; sarà $b's$ il punto di contatto che si cercava.

Suppongansi ora anche le tangenti q, r infinitamente vicine, cioè sia q tangente alla conica nel punto qr; allora in luogo dei vertici del quadrilatero circoscritto $qrst$, si avranno i punti di contatto di due tangenti q, s e il punto qs ove queste concorrono (fig. 113ª). Siccome i punti qt, rs ora coincidono in un punto unico qs, anche i raggi a, a' coincideranno in un raggio unico, che sarà per conseguenza uno degli elementi doppi dell'involuzione determinata dalle coppie pp', bb'. Dal teorema del N° 144 (a destra) abbiamo così:

Se da un punto S si tirano le tangenti pp' ad una conica, e si projettano due punti della medesima e il punto comune alle tangenti in essi punti mediante i raggi bb', a, sarà a un raggio doppio dell'involuzione determinata dalle coppie pp', bb'.

Se una conica variabile tocca due rette date pp' e passa per due punti dati, le tangenti in questi punti concorreranno sopra una retta fissa, passante pel punto pp'.

Se, oltre alla conica, variano anche i punti di contatto delle q, s, restando fisse le rette $pp'bb'$, il punto di concorso qs cadrà ancora nell'uno

[1] Cioè la retta che unisce i punti di contatto delle due tangenti.

dei punti doppi dell'involuzione determinata dalle coppie $PP' . BB'$. Dunque, dati quattro punti $PP'BB'$ in linea retta, descritta ad arbitrio una conica per PP', e condotte ad essa le tangenti da B e da B'; se ciascuna tangente da B si combina con ciascuna tangente da B', si avranno quattro corde di contatto, che a due a due concorreranno nei punti doppi dell'involuzione $PP' . BB'$ (1).

o nell'altro de' raggi doppi dell'involuzione determinata dalle coppie $pp' . bb'$. Dunque, dati quattro raggi $pp'bb'$ di un fascio, descritta ad arbitrio una conica tangente a p e p', e condotte ad essa le tangenti ne' punti in cui la segano le rette b, b'; se si combina ogni tangente relativa a b con ciascuna tangente relativa a b', si hanno quattro punti di concorso, che a due a due si troveranno ne' raggi doppi dell'involuzione $pp' . bb'$.

150. Di qui si ha una costruzione della tangente in S alla conica individuata da quattro punti $PP'QS$ e dalla tangente in Q (fig. 112ª). Infatti, siano A, B i punti in cui PP' incontra QS e la tangente data; e si costruisca il punto B' conjugato di B nell'involuzione determinata dalla coppia PP' e dal punto doppio A. Sarà SB' la tangente che si cerca.

Di qui si ha una costruzione del punto di contatto della tangente s colla conica individuata da quattro tangenti $pp'qs$ e dal punto di contatto di q (fig. 113ª). Infatti, siano a, b i raggi che dal punto pp' projettano rispettivamente il punto qs e il punto di contatto dato; e si costruisca il raggio b' conjugato di b nell'involuzione determinata dalla coppia pp' e dal raggio doppio a. Sarà sb' il punto cercato.

151. Nel teorema che precede (N° 149) suppongasi che la conica sia una iperbole (fig. 114ª); le tangenti date siano gli assintoti, onde la corda QR sarà tutta all'infinito.

L'involuzione ($PP' . BB' \ldots$) ha dunque un punto doppio A all'infinito; ne segue (N° 51) che l'altro elemento doppio è il punto di mezzo comune ai segmenti PP', BB', ... Dunque:

Se con una stessa trasversale si tagliano un'iperbole e i suoi due assintoti, il segmento intercetto dalla curva e il segmento intercetto dagli assintoti hanno lo stesso punto di mezzo.

Dall'avere i segmenti PP', BB' lo stesso punto di mezzo segue che

$$PB = B'P' \text{ e } PB' = BP' \text{ (2)}.$$

Di qui una regola per costruire l'iperbole della quale siano dati gli assintoti e un punto (3).

(1) Brianchon, *l. c.*, p. 20, 21.
(2) Apollonio, *l. c.*, II, 8, 16.
(3) Apollonio, *l. c.*, II, 4.

152. Nel teorema del N° 149 suppongansi i punti PP' infinitamente vicini (fig. 115ª), cioè sia la trasversale tangente alla conica; il punto di contatto P sarà l'altro punto doppio dell'involuzione determinata dalla coppia BB' e dal punto doppio A; dunque i quattro punti $PABB'$ sono armonici (N° 96, a). Ossia:

In un triangolo circoscritto (UBB') ciascun lato (BB') è diviso armonicamente dal suo punto di contatto (P) e dalla retta che unisce i punti di contatto (Q, S) degli altri due.

a) Dal punto A parte un'altra tangente, il cui punto di contatto sia O. I punti armonici $PABB'$ sono il punto di contatto della tangente AB e quelli in cui questa sega le altre tre tangenti OA, QB, SB'; dunque (N° 113, b) le quattro tangenti AB, OA, QB, SB' saranno incontrate da qualunque altra tangente in quattro punti armonici; vale a dire, esse sono quattro tangenti armoniche (N° 111). E siccome la retta QS, che unisce i punti di contatto delle tangenti conjugate QB, SB' passa pel punto A, così:

Se la corda di contatto di due tangenti passa pel punto di concorso di due altre tangenti, le prime due tangenti sono separate armonicamente mediante le altre due.

b) E viceversa:

Se quattro tangenti di una conica sono armoniche, la corda di contatto di due conjugate passa pel punto comune alle altre due.

Nel teorema del N° 149 suppongansi le tangenti pp' infinitamente vicine (fig. 116ª), cioè il punto S sia preso sulla conica; la tangente in S sarà l'altro raggio doppio dell'involuzione determinata dalla coppia bb' e dal raggio doppio a; dunque: i quattro raggi $pabb'$ sono armonici (N° 96, a). Ossia:

In un triangolo inscritto (ubb') ogni angolo (bb') è diviso armonicamente mediante la tangente (p) nel vertice e la retta che va al punto di concorso delle tangenti (q, s) negli altri due vertici.

La retta a incontra la conica in un altro punto, la cui tangente sia o. Le rette armoniche $pabb'$ sono la tangente in S e le congiungenti di S a tre altri punti della conica (punti di contatto delle o, q, s); dunque (N° 113, a), questi quattro punti saranno projettati da qualunque altro punto della conica mediante quattro raggi armonici; vale a dire, essi sono quattro punti armonici della conica (N° 109). E siccome il punto di concorso delle q, s è nella corda di contatto delle p, o, così:

Se il punto di concorso delle tangenti in due punti è situato nella retta che congiunge due altri punti, i primi due punti sono separati armonicamente mediante gli altri due.

E viceversa:

Se quattro punti di una conica sono armonici, il punto di concorso delle tangenti in due punti conjugati giace nella retta che congiunge gli altri due.

153. Questi due enunciati correlativi si possono fondere in un solo e me-

desimo teorema, in virtù della proprietà già veduta altrove (Ni 112 e 113, *c*) che se quattro punti di una conica sono armonici, le quattro tangenti in essi sono armoniche e viceversa. E allora potremo dire:

Se due tangenti di una conica concorrono in un punto della corda di contatto di due altre tangenti, viceversa il punto di concorso di queste sarà nella corda di contatto delle prime due; e le quattro tangenti (del pari che i loro punti di contatto) costituiscono un gruppo armonico [1].

Nella fig. 115ª, come QS passa per A, così OP passa per U, punto comune alle QB, SB'; e come sono armoniche le quattro rette $U(Q.S.P.A)$, così sono tali le $A(O.P.Q.U)$.

Nella fig. 116ª, come il punto qs è in a, così il punto op è nella u che congiunge i contatti delle q, s; e come sono armonici i quattro punti $u(q.s.p.a)$, così sono tali i quattro punti $a(o.p.q.u)$.

154. Esempio. — La conica sia un'iperbole (fig. 117ª); gli assintoti sono due tangenti, la cui corda di contatto QS è la retta all'infinito. Perciò due tangenti parallele avranno i loro punti di contatto in linea retta col punto di concorso U degli assintoti; e viceversa se pel punto U si conduce una trasversale a segare la curva in due punti P, O, le tangenti in questi punti sono parallele. I due punti di contatto P, O hanno il loro punto di mezzo nel punto U, perchè in generale (fig. 115ª) il gruppo $UVPO$ è armonico, e nel caso attuale V è all'infinito.

Una tangente qualunque sega gli assintoti in due punti BB' separati armonicamente dal punto di contatto P e dalla corda di contatto, che è la retta all'infinito; dunque P è il punto di mezzo fra B e B'; ossia

La porzione di una tangente dell'iperbole intercetta fra gli assintoti è divisa per metà dal punto di contatto [2].

Questa proposizione è un caso particolare di quella enunciata al N° 151.

155. Siccome in virtù del teorema di Desargues (N° 143) le coppie di punti $PP'.AA'.BB'$ (fig. 106ª) sono in involuzione, così ha luogo l'uguaglianza di rapporti anarmonici $(PP'AB)=(P'PA'B')$, ossia

$$\frac{PA}{P'A}:\frac{PB}{P'B}=\frac{PB'}{P'B'}:\frac{PA'}{P'A'}.$$

Ma $PA:P'A$ è uguale al rapporto delle distanze (prese in una direzione fissata ad arbitrio) de' punti P, P' della retta QT; e un significato analogo hanno gli altri rapporti contenuti nella suesposta equazione; sicchè questa potrà scriversi così:

$$\frac{(A)}{(A)'}:\frac{(B)}{(B)'}=\frac{(B')}{(B')'}:\frac{(A)}{(A')'},$$

[1] Delahire, *l. c.*, lib. 1, 30. — Steiner, *l. c.*, p. 159.

[2] Apollonio, *l. c.*, II, 3, 9.

ossia

$$\frac{(A) \cdot (A')}{(B) \cdot (B')} = \frac{(A)' \cdot (A')'}{(B)' \cdot (B')'},$$

dove (A), (A'), (B), (B') siano le distanze (perpendicolari od oblique sotto angoli dati) del punto P dai lati QT, RS, QR, TS del quadrangolo inscritto $QRST$; ed $(A)'$, $(A')'$, $(B)'$, $(B')'$ siano le distanze (sotto angoli risp. uguali ai primi) del punto P' dai lati medesimi. L'equazione precedente dice adunque che il rapporto

$$\frac{(A) \cdot (A')}{(B) \cdot (B')}$$

è una quantità costante, qualunque sia il punto P della conica; ossia:

Se un quadrangolo è inscritto in una conica, il prodotto delle distanze di un punto qualunque della curva da due lati opposti ha un rapporto costante col prodotto delle distanze dello stesso punto dagli altri due lati opposti (¹).

156. Così pure, si può mettere sotto una forma analoga il teorema correlativo a quello di Desargues (N° 143, a destra). S'indichino con R, T, T_1, R_1 i vertici qr, qt, st, sr del quadrilatero circoscritto $qrst$ (fig. 107*); con P, P' le intersezioni delle tangenti pp' col lato q; e con P_1, P_1' quelle delle stesse tangenti col lato opposto s. In virtù del teorema N° 143, b), sono uguali i rapporti anarmonici $(RTPP')$, $(R_1T_1P_1P_1')$, cioè si ha

$$\frac{RP}{TP} : \frac{RP'}{TP'} = \frac{R_1P_1}{T_1P_1} : \frac{R_1P_1'}{T_1P_1'},$$

ossia

$$\frac{RP \cdot T_1P_1}{TP \cdot R_1P_1} = \frac{RP' \cdot T_1P_1'}{TP' \cdot R_1P_1'}.$$

Ma $RP : TP$ è uguale al rapporto delle distanze (prese in una stessa direzione, del resto arbitraria) dei punti R, T dalla retta p; ed analogamente $T_1P_1 : R_1P_1$ è uguale al rapporto delle distanze dei punti T_1, R_1 dalla medesima retta p. L'uguaglianza suesposta esprime adunque che la quantità

$$\frac{RP \cdot T_1P_1}{TP \cdot R_1P_1}$$

è costante, qualunque sia la tangente p. Ossia:

Se un quadrilatero è circoscritto ad una conica, il prodotto delle distanze d'una tangente qualunque da due vertici opposti ha un rapporto costante col prodotto delle distanze della tangente medesima dagli altri due vertici (²).

(¹) Questa proposizione da Chasles è denominata *teorema di* Pappo, perchè risponde al celebre *problema ad quatuor lineas* di quest'antico geometra: cfr. *Aperçu historique*, p. 37 e 338.

(²) Chasles, *Sect. coniques*, N° 26.

§ 18. Elementi uniti, ed elementi doppi.

157. Abbiansi due fasci projettivi di raggi, concentrici o no, e pel loro centro comune o pei loro centri O, O' s'imagini descritta una conica (o un cerchio), che seghi i raggi del primo fascio in $A, B, C, \ldots$ ed i raggi del secondo in $A', B', C', \ldots$. Queste due serie di punti s'imaginino projettate da due nuovi punti O_1, O_1' (o da uno stesso punto) della conica; i due fasci projettanti $O_1(ABC\ldots)$, $O'_1(A'B'C'\ldots)$ saranno (N° 113, *a*) rispettivamente projettivi ai due fasci dati $O(ABC\ldots)$, $O'(A'B'C'\ldots)$, epperò projettivi fra loro.

Le due serie di punti $ABC\ldots$, $A'B'C'\ldots$ si diranno projettive (1).

a) Projettinsi ora queste due serie (fig. 118ª) da due punti corrispondenti delle medesime, per es. A', A. I fasci projettanti

$$A'(A, B, C, \ldots), \quad A(A', B', C' \ldots)$$

saranno projettivi; anzi prospettivi, a cagione del raggio unito AA'. Dunque (N° 62, *b*) le coppie di raggi corrispondenti si segheranno sopra una retta fissa, ossia i punti comuni alle coppie di rette AB' e $A'B$, AC' e $A'C$, AD' e $A'D, \ldots$ saranno in una sola e medesima retta s. Un punto qualunque di questa retta s, congiunto ad A', A, darà due rette che segheranno di nuovo la conica in due punti corrispondenti delle serie $ABCD\ldots$, $A'B'C'D'\ldots$.

Si giungerebbe alla medesima retta s, se invece di A', A si adoperassero come centri di projezione due altri punti corrispondenti, per es. B', B. Infatti, dal teorema di Pascal si ha che, essendo $AB'CA'BC'$ un esagono inscritto, il punto comune alle $B'C$, BC' è nella retta che passa pel punto comune alle $A'B$, AB', e pel punto comune alle $A'C$, AC' (N° 117, a destra).

b) Ogni punto M, comune alla conica ed alla retta s è un punto unito delle due serie $ABC\ldots$, $A'B'C'\ldots$. Infatti, le rette MA', MA incontrano di nuovo la conica in uno stesso punto M, cioè in M sono riuniti due punti corrispondenti delle due serie projettive. Segue da ciò che le due serie avranno due punti uniti, uno solo,

(1) Staudt, *Beiträge zur Geometrie der Lage* (Nürnberg 1856–57–60), N° 7. — Reye, *l. c.*, I, p. 102 e seg.

o, nessuno, secondochè la retta s seghi la conica in due punti (fig. 119ª, *a*), o la tocchi in un punto (fig. 119ª, *b*), o non abbia con essa alcun punto comune (fig. 119ª, *c*).

c) Dalle cose premesse si raccoglie che due serie projettive di punti in una conica sono individuate da tre coppie di punti corrispondenti (A, A'), (B, B'), (C, C'). Per trovare altre coppie di punti corrispondenti e per ottenere i punti uniti, se esistono, basta costruire la retta s che passa pei tre punti di concorso delle coppie di lati opposti dell'esagono inscritto $AB'CA'BC'$ (fig. 85ª, 118ª e 119ª). I punti uniti sono quelli che s ha comuni colla conica; e due punti corrispondenti qualunque D, D' sono tali che le rette $A'D$ e AD' (ovvero $B'D$ e BD', ovvero $C'D$ e CD') si seghino su s [1].

158. In luogo di serie projettive di punti in una conica, si possono anche considerare serie projettive di tangenti. Se o, o' sono due rette (distinte o sovrapposte) punteggiate projettive, descrivasi una conica che tocchi o ed o'; e da ogni coppia di punti corrispondenti A ed A', B e B', C e C', ... si conducano alla conica le tangenti a ed a', b e b', c e c'.... Se ora si segano queste due serie di tangenti abc ..., $a'b'c'$ ... risp. con due altre tangenti o_1, o_1', si otterranno due nuove punteggiate risp. projettive alle date (N° 113, *b*), epperò projettive fra loro.

Le due serie abc..., $a'b'c'$... di tangenti di una conica, dotate della proprietà d'essere segate da qualsiasi altra tangente della curva medesima in punti costituenti due punteggiate projettive, diconsi projettive.

a) Suppongasi la prima serie segata colla retta a', la seconda colla retta a. Le punteggiate projettive che ne risultano sono prospettive, a cagione del punto unito aa'; dunque le altre coppie di punti corrispondenti $a'b$ ed ab', $a'c$ ed ac',... sono in linea retta con un punto fisso S. Questo punto non cambia se si adoperano come trasversali due altre tangenti b' e b; infatti, essendo $ab'ca'bc'$ un esagono circoscritto, le rette che uniscono le coppie di vertici opposti $a'b$ ed ab', $a'c$ ed ac', $b'c$ e bc' concorrono in uno stesso punto, in virtù del teorema di Brianchon (N° 117, a sinistra).

b) Se per S si possono condurre tangenti alla conica, ciascuna di esse è un raggio unito delle due serie projettive abc..., $a'b'c'$....

c) Due serie projettive abc..., $a'b'c'$ di tangenti di una conica sono individuate da tre coppie di rette corrispondenti (a, a'), (b, b'), (c, c'). Per trovare altre coppie di rette corrispondenti e per ottenere le rette unite, se esistono, basta costruire il punto S comune alle diagonali che congiungono le coppie di vertici opposti dell'esagono circoscritto $ab'ca'bc'$. Le rette unite sono

[1] Steiner, *l. c.*, p. 174.

le tangenti per S; e due rette corrispondenti qualunque d, d' sono tali che i punti $a'd$, ad' (ovvero $b'd$ e bd', ovvero $c'd$ e cd') siano in linea retta con S.

d) Una serie di punti ABC... di una conica ed una serie di tangenti abc... della stessa conica diconsi projettive, se il fascio di raggi che projettano ABC... da un punto qualunque della conica è projettivo alla punteggiata che le rette abc... segnano sopra una tangente qualunque della conica medesima.

Una serie di punti ABC... o di tangenti abc... di una conica dicesi projettiva ad una punteggiata o ad un fascio, se la punteggiata o il fascio è projettivo al fascio di raggi che projettano ABC... da un punto qualunque della conica o alla punteggiata che dalle abc... è segnata sopra una tangente qualunque della conica medesima.

e) Premesse queste definizioni, se colla denominazione di forma di 1ª specie, oltre alle punteggiate ed ai fasci, si abbracciano le serie di punti o di tangenti di una conica (¹), si può ora enunciare la proposizione: due forme di 1ª specie, projettive ad una terza (della stessa specie), sono projettive tra loro (cfr. N° 35).

f) Dalle definizioni medesime segue ora che il teorema del N° 113, *c*) si può enunciare nel seguente modo:

Una serie qualunque di tangenti di una conica è projettiva alla serie dei punti di contatto.

g) Siano dunque ABC..., $A'B'C'$... due serie projettive di punti della conica; ed abc..., $a'b'c'$... le tangenti risp. in quei punti. Le serie abc..., $a'b'c'$... di tangenti saranno risp. projettive alle serie dei punti di contatto ABC..., $A'B'C'$..., epperò projettive fra loro. Sia s la retta nella quale si segano le coppie di rette analoghe alle AB' ed $A'B$, AC' ed $A'C$, BC' e $B'C$,...; ed S il punto col quale sono allineate le coppie di punti analoghe ad ab' ed $a'b$, ac' ed $a'c$, bc' e $b'c$,.... Se s sega la conica in due punti M, N, questi saranno i punti uniti delle serie ABC..., $A'B'C'$...; le tangenti m, n in M, N saranno perciò i raggi uniti delle serie abc..., $a'b'c'$...; dunque le m, n concorreranno in S.

h) Da tutto ciò si raccoglie che alla considerazione di una serie di tangenti si può sostituire quella dei punti di contatto, o viceversa.

159. Invece di due fasci projettivi e del resto qualisivogliano, come nel N° 157, consideriamo un'involuzione di raggi uscenti da un punto O, i quali siano segati da una conica descritta per O nelle coppie di punti AA', BB', CC',.... Projettinsi ora questi da un altro punto qualunque O_1 della conica; come sono per ipotesi

(¹) Coll'introduzione di queste nuove forme di 1ª specie, alle operazioni del segare con una retta e del projettare mediante raggi uscenti da un punto, se ne aggiungono due altre: quella di segare un fascio di raggi con una conica passante pel centro del fascio, e quella di projettare una retta punteggiata mediante le tangenti di una conica toccata dalla retta data.

(Ni 93, 94) projettivi i fasci $O(A.A'.B.C...)$, $O(A'.A.B'.C'...)$, così saranno (N° 113, *a*) pur projettivi i fasci $O_1(A.A'.B.C...)$, $O_1(A'.A.B'.C'...)$; cioè anche i raggi projettanti da O_1 saranno accoppiati in involuzione. In questo caso si dice che le due serie projettive di punti $ABC...$, $A'B'C'...$ della conica costituiscono un'involuzione, ossia che si ha nella conica un'involuzione formata dalle coppie di punti conjugati AA', BB', CC',... [1].

a) Così pure, se si ha un'involuzione di punti in una retta *o*, e dalle coppie di punti conjugati si conducano ad una conica toccata da *o* le coppie di tangenti aa', bb' cc',... queste saranno segate da qualunque altra tangente in punti costituenti un'involuzione; epperò si dirà che $aa'.bb'.cc'$... è un'involuzione di tangenti della conica (cfr. N° 158).

b) Se più coppie di tangenti $aa'.bb'.cc'$... di una conica formano un'involuzione, anche i loro punti di contatto $AA'.BB'.CC'$... saranno in involuzione, e viceversa (N° 158, *f*).

160. De' sei punti arbitrari $ABCA'B'C'$ considerati nel N° 157,*c*), prendasi C' infinitamente vicino ad A, e C infinitamente vicino ad A'. Allora le serie projettive $(ABA'...)$, $(A'B'A...)$ formano l'involuzione $(AA'.BB'...)$, e l'esagono inscritto $AB'CA'BC'$ si muta nella figura costituita dal quadrangolo inscritto $AB'A'B$, e dalle tangenti ne' vertici opposti A, A' (fig. 101a, 120a). Dunque:

Due coppie di punti (AA'), (BB') di una conica individuano in essa un'involuzione.

a) Per trovare altre coppie di punti conjugati ed i punti doppi, basta costruire la retta *s* che congiunge il punto comune alle AB', $A'B$, col punto comune alle AB, $A'B'$, vale a dire la retta che unisce i punti d'incontro delle coppie di lati opposti del quadrangolo inscritto $AB'AB$. I punti comuni ad *s* ed alla conica sono i punti doppi. Due punti conjugati C, C' sono tali che le rette AC, $A'C'$ (ovvero le AC', $A'C$, ovvero le BC, $B'C'$, ovvero le $B'C$, BC') si segano sulla *s*.

b) Anche le tangenti in due punti conjugati, come AA', BB',... si segano sempre sulla *s* (N° 129).

c) Siccome le coppie di rette BC e $B'C'$, CA e $C'A'$, AB e $A'B'$ si segano in tre punti di una stessa retta *s*, così i trian-

[1] Staudt, *Beiträge*, N° 70 e seg.

goli (1) ABC, $A'B'C'$ sono omologici (N° 13); dunque le rette AA', BB', CC' concorrono in uno stesso punto S. A determinare questo punto bastano le AA', BB'; dunque:

Due punti conjugati qualunque dell'involuzione sono in linea retta con un punto fisso S.

O altrimenti:

Ogni retta per S, la quale seghi la conica, dà due punti conjugati dell'involuzione.

d) Si è veduto che, se s ha comuni colla conica due punti M, N, questi sono i punti doppi dell'involuzione. Dunque le tangenti in M, N concorreranno in S.

e) Viceversa, le coppie de' punti in cui una conica è segata dai raggi di un fascio, il centro S del quale non sia un punto della curva, costituiscono un'involuzione. Infatti, se (AA'), (BB') sono i punti d'intersezione della conica con due raggi, le due coppie AA', BB' individuano un'involuzione, nella quale due punti conjugati sono sempre in linea retta con un punto fisso, cioè con S. Se l'involuzione ha punti doppi, essi saranno le intersezioni della conica colla retta s che contiene il punto comune alle AB, $A'B'$, ed il punto comune alle AB', $A'B$.

f) Se dai vari punti di una retta s si conducono alla conica le coppie di tangenti aa', bb', cc', ..., queste formano un'involuzione. Infatti, siano AA', BB', CC' i punti di contatto delle rette aa', bb', cc', ed S il punto ove concorrono le corde AA', BB'; nell'involuzione determinata dalle coppie AA', BB', due altri punti conjugati qualunque saranno allineati con S. Il punto C e il suo conjugato sono dunque in una retta passante per S; e le tangenti in questi punti devono concorrere sulla retta colla quale concorrono aa' e bb', cioè su s; dunque il punto conjugato di C è C'. Vale a dire: AA' . BB' . CC' sono coppie di punti in involuzione, epperò aa' . bb' . cc' sono coppie di tangenti in involuzione (N° 159, *b*).

g) Se M, N sono i punti doppi di un'involuzione AA' . BB' ... di punti d'una conica, s'è già veduto (*a*) che AB, $A'B'$, MN sono tre rette concorrenti in un punto (come pure $A'B$, AB', MN). Dunque, pel teorema *e*), si ha:

Se AA' . BB' sono due coppie di elementi conjugati ed MN gli elementi doppi d'un'involuzione, saranno $MN . AB . A'B'$ (e così pure MN . AB' . $A'B$) tre coppie di elementi conjugati in una nuova involuzione.

h) La retta s sega la conica, se il punto S è esterno (fig. 120*, *a*), cioè se delle due coppie AA', BB' l'una è tutta interna o tutta

(1) Così pure sono omologici $A'BC$ ed $AB'C'$, $AB'C$ ed $A'BC'$, ABC' ed $A'B'C$.

esterna all'altra; invece se l'una delle coppie è separata mediante l'altra, il punto S riesce interno, e la retta s tutta esterna alla conica (fig. 120ª, *b*). Dunque ritroviamo di nuovo la proprietà (N° 98):

Un'involuzione ha due elementi doppi, se di due coppie di elementi conjugati, l'una è tutta interna o tutta esterna all'altra. Un'involuzione non ha elementi doppi, se di due coppie d'elementi conjugati, l'una è separata mediante l'altra.

Non può accadere mai che un'involuzione propriamente detta abbia un solo elemento doppio. Infatti, se s fosse tangente alla conica, S sarebbe il punto di contatto, e in ciascuna coppia di punti conjugati, uno coinciderebbe sempre con S (cfr. N° 96, *c*).

161. Se $(MNAB...)$, $(MNA'B')$ sono due serie projettive di punti in una conica, i punti uniti saranno M ed N, e la retta MN conterrà il punto comune alle AB', $A'B$ (N° 157, *b*). Suppongasi ora che, se il punto B' s'accosta infinitamente ad A, anche B ed A' divengano infinitamente prossimi, sicchè le posizioni limiti delle rette AB', $A'B$ siano le tangenti in A, A' (fig. 121ª). Ma se $MNAA'$, $MNA'A$ sono gruppi corrispondenti in due serie projettive, ciò vuol dire che, projettando questi punti da un punto O fissato arbitrariamente sulla conica, i due gruppi di raggi projettanti $mnaa'$, $mna'a$ sono projettivi; cioè che il gruppo $mnaa'$ è armonico (N° 65). Avremo dunque il teorema (già ottenuto al N° 152):

Se quattro punti $MNAA'$ di una conica sono armonici, le tangenti in due punti conjugati, per es. A e A', concorrono sulla retta che unisce gli altri due.

Ovvero (N° 113, *c*):

Se quattro tangenti di una conica sono armoniche, due conjugate si segano sulla retta che unisce i punti di contatto delle altre due.

Di qui segue che, se pel punto S comune alle tangenti in M, N, si conducono le rette a segare la conica in (A, A'), (B, B'), (C, C'),... tutte queste coppie di punti saranno separate armonicamente mediante MN. Dunque le coppie di tangenti alla conica in A e A', B e B', C e C',... concorreranno sulla MN.

O in altre parole:

Se da un punto si conducono ad una conica due tan-

genti ed una segante, i due punti di contatto e i due punti di segamento formano un gruppo armonico.

a) I punti (AA'), (BB'), (CC'),... costituiscono un'involuzione, i cui punti doppi sono MN (N° 160, *c*, *d*). Arriviamo dunque di nuovo alla proprietà che, se l'involuzione ha due elementi doppi, questi sono separati armonicamente mediante due elementi conjugati qualunque (N° 96, *a*).

b) La conica sia un circolo (fig. 122ª). Allora i triangoli simili SAM, SMA' dànno

$$AM : MA' = SM : SA',$$

e i triangoli simili SAN, SNA'

$$AN : NA' = SN : SA';$$

ma $SM = SN$, dunque:

$$\frac{AM}{AN} = \frac{A'M}{A'N},$$

ossia

$$AM \,.\, A'N = AN \,.\, A'M.$$

Siccome il quadrangolo $AMA'N$ è inscritto nel cerchio, così si ha pel noto teorema di Tolomeo ([1])

$$AA' \,.\, MN = AM \,.\, A'N + AN \,.\, A'M,$$

dunque pel quadrangolo formato da quattro punti armonici si ha:

$$\tfrac{1}{2} AA' \,.\, MN = AM \,.\, A'N = AN \,.\, A'M.$$

162. Le proprietà contenute nel N° 157 e ne' seguenti forniscono immediatamente la soluzione del problema:

Costruire gli elementi uniti di due forme projettive sovrapposte, e gli elementi doppi di un'involuzione.

a) Sia O il centro comune di due fasci projettivi, individuati mediante tre coppie di raggi corrispondenti (fig. 123ª). Descrivasi per O un cerchio che seghi le tre coppie di raggi dati in (A, A'), (B, B'), (C, C'). Trovisi il punto R comune alle rette AB', $A'B$; e il punto Q comune alle rette AC', $A'C$. Se la retta QR sega il cerchio in due punti M, N, saranno OM, ON i raggi uniti domandati.

b) Siano AA', BB', CC' tre coppie di punti corrispondenti in due punteggiate projettive sovrapposte u, u' (fig. 124ª); e si vogliano costruire i punti uniti.

([1]) Baltzer, *Planimetria*, pag. 192.

Da un punto O di una circonferenza tracciata ad arbitrio, i punti dati si projettino sulla circonferenza in A_1A_1', B_1B_1', C_1C_1' (1). Trovisi il punto R comune alle rette A_1B_1', A'_1B_1, e il punto Q comune alle A_1C_1', A'_1C_1 (o il punto P comune alle B_1C_1', $B_1'C_1$). Se la retta PQR sega il cerchio in due punti M_1, N_1, e si projettino M_1, N_1 da O in M, N sulla retta data, saranno M,N i punti uniti domandati (2).

c) Se i due fasci in *a*) sono in involuzione, a individuarli bastano due coppie di raggi conjugati (fig. 125ª). Col cerchio descritto per O seghinsi quei raggi in (A, A'), (B, B'); sia R il punto comune alle AB', $A'B$; e Q il punto comune alle AB, $A'B'$. Se la retta QR sega il cerchio in due punti M, N, saranno OM, ON i raggi doppi dell'involuzione. La retta QR non sega il cerchio quando il punto S, comune alle AA', BB', è interno al cerchio.

d) Siano AA', BB' due coppie di punti conjugati di un'involuzione di punti in linea retta, e si domandino i punti doppi (fig. 126ª).

Da un punto O di una circonferenza tracciata ad arbitrio, i punti dati vengano projettati sulla circonferenza in A_1A_1', B_1B_1'. Sia R il punto comune alle A_1B_1', $A_1'B_1$; e Q il punto comune alle A_1B_1, $A_1'B_1'$. Se la retta QR sega il cerchio in M_1, N_1 e si projettino questi punti da O in M, N sulla retta data, saranno M, N i punti doppi domandati.

163. Ritenuto il caso *c*) dell'involuzione, se il punto S comune alle rette AA', BB',... è il centro del cerchio (fig. 127ª), cioè se le AA', BB',... sono altrettanti diametri del cerchio, ciascun raggio OA, OB,... sarà perpendicolare al suo conjugato: vale a dire l'involuzione sarà in questo caso costituita da tutti gli angoli retti che hanno il centro in O.

Ma se S non è il centro del cerchio, per S passerà un solo diametro, così che, detti C, C' i punti d'intersezione del cerchio con questo diametro, i raggi OC, OC' saranno perpendicolari fra loro, e saranno i soli raggi conjugati dotati di questa proprietà (fig. 128ª). Ossia:

Un'involuzione di raggi o è tutta costituita da angoli retti, o contiene uno ed un solo angolo retto, i cui lati siano raggi conjugati.

164. Questo teorema non è che un caso particolare del seguente. Abbiansi due distinte involuzioni di raggi tutti concorrenti in un punto O; ed un cerchio descritto per O seghi i raggi conjugati della prima involuzione nelle coppie di punti (AA' . BB' .....) e

(1) Nella figura, ciascun punto della retta data e la sua projezione da O sul cerchio sono indicati colla stessa lettera.

(2) Steiner, *l. c.*, p. 68 e 174.

quelli della seconda in ($GG' . HH'$ ....). Sia S il punto comune alle AA', BB',..., e T il punto comune alle GG', HH',... Se la retta ST sega il cerchio in due punti E, E', questi saranno conjugati in entrambe le involuzioni, perchè allineati sì con S, sì con T. Cerchiamo ora in quali casi la retta ST riesca segante il cerchio.

In primo luogo, ciò avverrà se almeno uno de' punti S, T sia interno al cerchio (N° 160, h), cioè se almeno una delle involuzioni sia priva d'elementi doppi (fig. 129ª).

Se i punti S, T sono entrambi esteriori, cioè se entrambe le involuzioni posseggono elementi doppi, e questi siano OM, ON per l'una, OU, OV per l'altra, i raggi OE, OE' dovranno separare armonicamente sì la coppia OM, ON, sì la coppia OU, OV. Ma (N° 55, d) affinchè esista una coppia d'elementi OE, OE' che formi un gruppo armonico sì colla coppia OM, ON, sì colla coppia OU, OV, è necessario e sufficiente che di queste due coppie l'una non sia separata mediante l'altra; dunque:

Due involuzioni sovrapposte (ossia contenute in una medesima forma di 1ª specie) hanno sempre una coppia comune d'elementi conjugati, eccettuato il caso che entrambe le involuzioni siano dotate d'elementi doppi, e gli elementi doppi dell'una siano separati mediante gli elementi doppi dell'altra.

La fig. 130ª (del pari che la 129ª) ci presenta i casi di due involuzioni con una coppia comune EE' di elementi conjugati. La fig. 131ª illustra invece il caso in cui la coppia comune non esiste.

a) Il problema che precede (cioè la ricerca della coppia d'elementi conjugati comune a due involuzioni sovrapposte) rientra in quello di determinare (in una punteggiata, in un fascio o in una conica) due elementi che formino sistema armonico coll'una e coll'altra di due coppie date (N° 55, d).

Si tratti per esempio di punti situati in linea retta; si projettino le coppie date sopra un circolo da un punto O del medesimo; le projezioni siano MN, UV (fig. 130ª). Le tangenti al circolo in MN concorrano in S; le tangenti in U, V concorrano in T. Se la coppia MN non è separata mediante la coppia UV, la retta ST segherà il circolo in due punti EE', e questi saranno i domandati.

b) I punti doppi dell'involuzione determinata dalle coppie $AA' . BB'$ costituiscono la coppia di elementi conjugati comune a due altre involuzioni, l'una determinata dalle coppie $AB . A'B'$, l'altra dalle coppie $AB' . A'B$ (N° 160, g).

Di qui si cava una maniera di costruire i punti doppi dell'involuzione determinata dalle coppie $AA' . BB'$ di punti in linea retta. Prendasi ad arbi-

trio un punto G fuori della retta data e descrivansi i circoli GAB, $GA'B'$, i quali avranno un altro punto comune H; così pure sia K la seconda intersezione dei circoli GAB', $GA'B$. Ogni circolo descritto pei punti GH incontra la retta data in due punti conjugati dell'involuzione $AB \,.\, A'B'$ (N° 98), ed analogamente ogni circolo per GK dà due punti conjugati dell'involuzione $AB' \,.\, A'B$. Dunque, se si descrive il circolo GHK e se questo incontra la retta data, i due punti d'intersezione saranno gli elementi doppi dell'involuzione $AA' \,.\, BB'$ [1].

165. Dalle cose che precedono risulta che la ricerca dei punti uniti di due serie projettive di punti $ABC\ldots$, $A'B'C'\ldots$ di una conica (e per conseguenza degli elementi uniti di due qualisivogliano forme projettive sovrapposte) si riduce alla costruzione della retta s, sulla quale si segano le coppie di rette AB' e $A'B$, AC' e $A'C$, BC' e $B'C\ldots$. E così pure la ricerca dei punti doppi d'un'involuzione $AA' \,.\, BB'\ldots$ si riduce alla costruzione della retta s, sulla quale si segano le coppie di rette AB ed $A'B'$, AB' ed $A'B,\ldots$ ovvero le coppie di tangenti in A ed A', B e $B',\ldots$

Viceversa, se è data ad arbitrio una retta s (non tangente alla conica), riesce determinata un'involuzione di punti sulla conica; giacchè basta condurre dai vari punti di s le coppie di tangenti alla conica, e i punti di contatto formeranno le coppie di punti conjugati.

Invece, perchè siano determinate due serie projettive $ABC\ldots$, $A'B'C'\ldots$, bisogna che, oltre alla retta s, sia data una coppia di punti corrispondenti AA'; ciascun punto di s unito ad A, A' dà due rette che incontreranno di nuovo la conica risp. in due punti corrispondenti B', B.

Due serie projettive di punti determinano un'involuzione; imperocchè dalle due serie si deduce la retta s e questa individua l'involuzione. Se le due serie hanno due punti uniti, questi sono anche gli elementi uniti dell'involuzione.

§ 19. Problemi di 2° grado.

166. Problema. — Dati cinque punti O, O', A, B, C di una conica, trovare le intersezioni della curva con una data retta s.

Soluzione. — Se da O e da O' (figura 132ª) si projettano gli altri punti A, B, $C,\ldots$ della conica, i fasci $O(A,B,C,\ldots)$, $O'(A,B,C,\ldots)$ sono projettivi, epperò segheranno la trasversale s in punti formanti due pun-

Date cinque tangenti o, o', a, b, c di una conica, trovare le tangenti che si possono condurre alla curva da un dato punto S.

Se colle rette o, o' (fig. 135ª) si segano le altre tangenti a, b, $c,\ldots$ della conica, le punteggiate $o(a,b,c,\ldots)$, $o'(a,b,c,\ldots)$ sono projettive, epperò si projetteranno dal centro S mediante due fasci projettivi concentrici.

[1] Chasles, *Géom. sup.*, N° 263.

teggiate projettive sovrapposte. Se *M* è un punto unito di queste punteggiate, sarà *M* un punto della conica, perchè in *M* si segano due raggi corrispondenti de' due fasci. Dunque i punti comuni alla conica ed alla retta *s* altro non sono che i punti uniti delle due punteggiate projettive sovrapposte, determinate dall'incontro di *s* colle tre coppie di raggi corrispondenti OA ed $O'A$, OB ed $O'B$, OC ed $O'C$. Questi punti uniti possono essere due, uno solo o nessuno, cioè la retta *s* può segare la conica in due punti, toccarla in un punto o non incontrarla affatto. Per la costruzione de' punti uniti veggasi il N° 162, *b*).

Nello stesso modo si risolve il problema, se della conica fossero dati quattro punti O, O', A, B e la tangente o in O; ovvero tre punti O, O', A e le tangenti o, o' in O, O'. Nel primo di questi casi, i fasci sarebbero determinati dalle tre coppie di raggi o ed $O'O$, OA ed $O'A$, OB ed $O'B$; nel secondo caso dalle tre coppie o ed $O'O$, OO' ed o', OA ed $O'A$.

Se della conica fossero invece date cinque tangenti, ovvero quattro tangenti ed un punto di contatto, ovvero tre tangenti e due punti di contatto, si potrebbe cominciare dal costruire (N[i] 134, 140, 141, *b*) gli altri punti di contatto; allora il problema sarebbe ridotto ad uno de' casi che precedono.

Se *m* è un raggio unito di questi fasci, sarà *m* una tangente della conica, perchè in *m* cadono due punti corrispondenti delle due punteggiate. Dunque le tangenti della conica che passano per *S* non sono altro che i raggi uniti de' due fasci projettivi concentrici, determinati dai raggi che da *S* projettano le tre coppie di punti corrispondenti oa ed $o'a$, ob ed $o'b$, oc ed $o'c$. Questi raggi uniti possono essere due, uno solo o nessuno, cioè può accadere che da *S* si possano condurre due tangenti, o che *S* sia un punto della curva, o che per *S* non passi alcuna tangente. Per la costruzione de' raggi uniti, veggasi il N° 162, *a*).

Nello stesso modo si risolverebbe il problema, se della conica fossero date quattro tangenti o, o', a, b ed il punto di contatto O di o; ovvero tre tangenti o, o', a e i punti di contatto O, O' di o, o'. Nel primo di questi casi, le punteggiate sarebbero determinate dalle tre coppie di punti O ed $o'o$, oa ed $o'a$, ob ed $o'b$; nel secondo caso dalle tre coppie O ed $o'o$, oo' ed O', oa ed $o'a$.

Se della conica fossero invece dati cinque punti, ovvero quattro punti e la tangente in uno di essi, ovvero tre punti e le tangenti in due di essi, si potrebbe cominciare dal costruire (N[i] 128, 134, 138) le tangenti negli altri punti dati; allora il problema sarebbe ridotto ad uno de' casi che precedono.

167. Nella costruzione del N° antecedente, a sinistra, suppongasi che la conica sia un'iperbole, e la trasversale *s* un assintoto (fig. 133[a]); le punteggiate projettive sovrapposte, segnate in *s* dai fasci $O(A, B, C, \ldots)$, $O'(A, B, C, \ldots)$, avranno in questo caso un solo punto unito, e questo a distanza infinita (il punto di contatto dell'iperbole coll'assintoto *s*). Ma (N° 77) in due punteg-

giate projettive sovrapposte, i cui punti uniti coincidano in un solo punto all'infinito, il segmento compreso fra due punti corrispondenti qualisivogliano ha una lunghezza costante; dunque:

Se intorno a due punti fissi O, O' di un'iperbole si fanno girare due raggi che si seghino costantemente sulla curva, il segmento PP' intercetto da questi raggi sopra un assintoto è di grandezza costante [1].

168. Se nel N° 166, a sinistra, si suppone che s sia la retta all'infinito, il problema diviene:

Dati cinque punti O, O', A, B, C di una conica, costruirne i punti all'infinito (fig. 134ª).

Considerando ancora i fasci projettivi $O(A, B, C, ...)$, $O'(A, B, C, ...)$, che segnano sulla retta s (ora all'infinito) due punteggiate projettive sovrapposte, i cui punti uniti sono i domandati, osserviamo che dovendo ciascuno di questi punti uniti essere comune alla retta (all'infinito) s e a due raggi corrispondenti de' due fasci, questi raggi saranno paralleli; dunque il problema si riduce a trovare le coppie di raggi corrispondenti paralleli ne' due fasci anzidetti.

A quest'uopo conducansi per O le rette OA', OB', OC' ordinatamente parallele alle $O'A$, $O'B$, $O'C$; e si costruiscano (N° 162, a) i raggi uniti de' due fasci projettivi concentrici determinati dalle coppie OA ed OA', OB ed OB', OC ed OC'. Se i raggi uniti sono due OM, ON, la conica individuata dai cinque punti dati sarà un'iperbole, i cui punti all'infinito sono nelle direzioni OM, ON, vale a dire, i cui assintoti sono paralleli alle OM, ON.

Se vi è un solo raggio unito OM, la conica individuata dai cinque punti dati è una parabola, il cui punto all'infinito è nella direzione OM.

Se non vi è alcun raggio unito, la conica individuata dai cinque punti dati, non avendo punti comuni colla retta all'infinito, è un'ellisse.

Nel primo di questi casi (fig. 134ª), se si vogliono costruire gli assintoti dell'iperbole, basterà considerare questa come individuata dai due punti all'infinito e da tre altri punti, per esempio A, B, C, cioè considerarla (N° 122) come generata mediante i due fasci projettivi di raggi paralleli gli uni ad OM, gli altri ad ON, e de' quali due corrispondenti passino per A, altri due per B, altri due per C. I raggi di questi fasci che corrispondono alla retta all'infinito, che è la congiungente de' centri, saranno gli assintoti domandati.

Dunque (fig. 134ª), se diconsi a, b, c i raggi paralleli ad OM e passanti per A, B, C; a', b', c' i raggi paralleli ad ON e passanti per A, B, C; congiungasi il punto ab' col punto $a'b$, ed il punto bc' col punto $b'c$; e sia K l'intersezione delle due congiungenti. Le rette condotte per K parallelamente ad OM, ON sono gli assintoti cercati.

169. Il problema « condurre da un punto dato S le tangenti alla conica della quale siano dati cinque punti $ABCDE$ » si può anche far dipendere

[1] Brianchon, *l. c.*, p. 36.

dal problema del N° 166 (a sinistra), ricorrendo alle proprietà dell'involuzione (N° 160, *e*), che si ottiene segando la conica con trasversali uscenti dal punto S.

Conducansi le rette SA, SB (fig. 136ª), che incontreranno la conica in due nuovi punti A', B', i quali si sanno costruire (coll'uso della sola riga e senza descrivere la curva) per mezzo del teorema di Pascal (N° 124, a destra). Nella figura i punti A', B' sono costruiti mediante gli esagoni $ADCBEA'$, $BECADB'$. Congiungasi il punto comune alle AB, $A'B'$ col punto comune alle AB', $A'B$; la congiungente s conterrà (N° 160, *a*) i punti di contatto delle tangenti che escono da S. La quistione è così ridotta a trovare le intersezioni della conica colla retta s (N° 166, a sinistra).

Lasciamo allo studioso di eseguire la costruzione correlativa (fig. 154ª), mediante la quale il problema « trovare i punti comuni ad una data retta s e alla conica individuata da cinque tangenti date » si riduce al problema del N° 166 (a destra).

170. Problema. — Costruire una conica che passi per quattro punti dati Q, R, S, T e tocchi una retta data s (non passante per alcuno de' punti dati).

Soluzione. — I lati QT, RS, QR, ST del quadrilatero $QRST$ seghino s in A, A', B, B' (fig. 137ª); e costruiscansi (N° 162, *d*) i punti doppi dell'involuzione determinata dalle coppie AA', BB'.

Se vi sono due punti doppi M, N, ciascuno di essi sarà (N° 145, a sinistra) punto di contatto fra S ed una conica circoscritta al quadrangolo $QRST$; onde il problema sarà risoluto dalle due coniche $QRSTM$, $QRSTN$, ciascuna delle quali si potrà costruire per punti, per mezzo del teorema di Pascal (N° 124, a destra).

Se non vi sono punti doppi, non vi sarà alcuna conica che soddisfaccia alle proposte condizioni.

Costruire una conica che tocchi quattro rette date q, r, s, t e passi per un dato punto S (non situato in alcuna delle rette date).

Soluzione. — Si projettino dal centro S i punti qt, rs, qr, st del quadrilatero $qrst$ mediante i raggi a, a', b, b' (fig. 138ª); e costruiscansi (N° 162, *c*) i raggi doppi dell'involuzione determinata dalle coppie aa', bb'.

Se vi sono due raggi doppi m, n, ciascuno di essi sarà (N° 145, a destra) tangente in S ad una conica inscritta al quadrilatero $qrst$; onde il problema sarà risoluto dalle due coniche $qrstm$, $qrstn$, ciascuna delle quali si potrà costruire per tangenti, col mezzo del teorema di Brianchon (N° 124, a sinistra).

Se non vi sono raggi doppi, non esisterà alcuna conica soddisfaciente alle condizioni proposte.

a) Se a sinistra si suppone s a distanza infinita, il problema diviene:

Costruire una parabola che passi per quattro punti dati Q, R, S, T. Da un centro arbitrario O (fig. 139ª) si conducano i raggi a, a', b, b' ordinatamente paralleli alle QT, RS, QR, ST; e si costruiscano i raggi doppi del-

l'involuzione determinata dalle coppie aa', bb'. Se vi sono due raggi doppi, ciascuno di essi darà la direzione nella quale si trova il punto all'infinito di una parabola passante pei quattro punti dati; onde il problema sarà ridotto all'ultimo del N° 128.

Per quattro punti dati o passano due parabole o nessuna; nel primo caso le altre coniche circoscritte sono ellissi ed iperboli; nel secondo caso soltanto iperboli. Il primo caso ha luogo quando ciascuno de' quattro punti dati è esterno al triangolo formato dagli altri tre; il secondo, quando uno de' quattro punti è interno al triangolo che ha i vertici negli altri tre.

b) Se nell'enunciato a destra una delle rette $qrst$ è all'infinito, il problema diviene:

Costruire una parabola che tocchi tre rette date e passi per un punto dato.

171. Problema. — *Costruire una conica che passi per tre punti dati P, P', P'' e tocchi due rette date q, s (nessuna delle quali passi per alcuno de' punti dati).*

La soluzione è fondata sul teorema del N° 149 (a sinistra). Imaginiamo la conica cercata e la coppia di tangenti date q, s intersecate dalla trasversale PP' nelle coppie di punti PP', BB' (fig. 140ª); in virtù di quel teorema, se A, A_1 sono i punti doppi dell'involuzione determinata dalle coppie anzidette, per uno di questi passerà la corda di contatto fra la conica e le rette qs. Analogamente si dica per la trasversale PP'', la quale seghi le q, s in D, D''; cioè, si costruiscano del pari i punti doppi C, C_1 dell'involuzione determinata dalle coppie PP'', DD''; la corda di contatto passerà per C o per C_1. Concludiamo che il problema ammette quattro soluzioni; cioè, se entrambe le involuzioni $(PP' . BB')$, $(PP'' . DD'')$ ammettono punti doppi (A, A_1), (C, C_1), vi sono quattro coniche soddisfacenti alle poste condizioni; e per esse le corde di contatto colle tangenti q, s sono ordinatamente AC, A_1C, AC_1, A_1C_1. Di

Costruire una conica che tocchi tre rette date p, p', p'' e passi per due punti dati Q, S (nessuno de' quali sia situato in alcuna delle rette date).

La soluzione è fondata sul teorema del N° 149 (a destra). Imaginiamo condotte dal punto pp' le tangenti p, p' alla conica e i raggi b, b' ai punti Q, S (fig. 141ª); in virtù di quel teorema, se a, a_1 sono i raggi doppi dell' involuzione determinata dalle coppie pp', bb', in uno di essi cadrà il punto di concorso delle tangenti alla conica ne' punti Q, S. Analogamente si dica pel punto pp'', dal quale si tirino i raggi d, d'' ai punti Q, S; cioè si costruiscano del pari i raggi doppi c, c_1 dell'involuzione determinata dalle coppie pp'', dd''; il punto di concorso anzidetto si troverà in c o in c_1. Concludiamo che il problema ammette quattro soluzioni; cioè, se entrambe le involuzioni $(pp' . bb')$, $(pp'' . dd'')$ ammettono raggi doppi (a, a_1), (c, c_1), vi saranno quattro coniche soddisfacenti alle poste condizioni; e per esse i punti di concorso delle tangenti in Q, S sono ordinatamente ac, a_1c, ac_1, a_1c_1. Di ciascuna fra queste coniche,

ciascuna di queste coniche, verbigrazia della prima, si conoscono cinque punti, vale a dire P, P', P'', e le intersezioni di AC con q, s; onde si potrà costruirla per punti col mezzo del teorema di PASCAL (N° 124, a destra).

verbigrazia della prima, si conoscono cinque tangenti, vale a dire p, p', p'' e le congiungenti di ac con Q, S; onde si potrà costruirla per tangenti col mezzo del teorema di BRIANCHON (N° 124, a sinistra).

172. PROBLEMA. — *Costruire un poligono i cui vertici cadano su rette date e i cui lati passino per punti dati* [1].

SOLUZIONE. — Per fissare le idee (fig. 142*), supponiamo che si tratti di costruire un quadrilatero (semplice), i cui vertici, che diremo 1, 2, 3, 4, cadano ordinatamente sulle rette date s_1, s_2, s_3, s_4, ed i cui lati 12, 23, 34, 41 passino pei punti dati S_{12}, S_{23}, S_{34}, S_{41}. Dal centro S_{12} projettiamo i punti $A_1B_1C_1$ ... di s_1 su s_2 in $A_2B_2C_2$ ...; poi dal centro S_{23} si projetti la punteggiata $A_2B_2C_2$ ... su s_3 in $A_3B_3C_3$ ...; indi da S_{34} si projetti $A_3B_3C_3$ ... in $A_4B_4C_4$ ... su s_4; e finalmente da S_{41} si projetti $A_4B_4C_4$ ... in ABC ... su s_1. Per tal modo i punti S_{12}, S_{23}, S_{34}, S_{41} sono i centri di quattro fasci projettivi, giacchè il quarto è prospettivo al primo (sezione comune s_1), il primo al secondo (sezione comune s_2), il secondo al terzo (sezione comune s_3), il terzo al quarto (sezione comune s_4). Segue da ciò (N° 114, *a*) che il luogo del punto comune a due raggi corrispondenti (come A_1A_2 ed A_4A) del primo e quarto fascio, vale a dire il luogo del 1° vertice del quadrilatero variabile, i cui vertici 2°, 3° e 4° (come A_2, A_3, A_4) si muovono su tre rette date (s_2, s_3, s_4), e i cui lati (A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A) passano pei quattro punti dati (S_1, S_2, S_3, S_4), è una conica [2].

Questa conica passa pei punti S_{12}, S_{41}, centri dei fasci che la generano; quindi a determinarla bastano tre altri suoi punti, cioè i punti d'intersezione di tre coppie di raggi corrispondenti A_1A_2 ed A_4A, B_1B_2 e B_4B, C_1C_2 e C_4C. Dopo di ciò, basterà costruire (N° 166) le intersezioni della retta s_1 colla conica determinata da questi cinque punti, e ciascuna di esse potrà essere presa come vertice 1 del quadrilatero cercato.

La stessa costruzione può essere considerata sotto quest'altro aspetto. Le linee spezzate $A_1A_2A_3A_4A$, $B_1B_2B_3B_4B$, $C_1C_2C_3C_4C$ si possono risguardare come tentativi fatti per costruire il quadrilatero cercato: tentativi che dànno de'poligoni non chiusi, ma aperti, giacchè il punto A non coincide con A_1, nè B con B_1, nè C con C_1. Questi tentativi, e tutti gli altri analoghi che si possono pensare, ma che non è necessario di eseguire, dànno sulla retta s_1 due punteggiate $A_1B_1C_1$ ..., ABC ... (descritte l'una dall'origine, l'altra dal

[1] PONCELET, *l. c.*, p. 345.

[2] Questo teorema (se un poligono semplice si deforma in modo che i suoi lati passino per punti dati e i suoi vertici, meno uno, corrano su rette date, l'ultimo vertice descrive una conica) è di MACLAURIN (Transactions philosophiques de la Société Royale de Londres, année 1735).

termine della spezzata o poligono aperto), che sono projettive perchè la seconda nasce dalla prima mediante projezioni dai centri S_{12}, S_{23}, S_{34}, S_{41} e sezioni colle trasversali s_2, s_3, s_4, s_1. Ciascuno de' punti uniti di queste punteggiate risolve il problema; imperocchè, se in esso si pone l'origine della spezzata, ivi cade anche il termine della medesima, sicchè il poligono risulta chiuso.

Il metodo, sì in questo, sì ne' problemi seguenti, è il medesimo qualunque sia il numero dei lati del poligono da costruirsi.

173. Problema. — In una conica data [1] inscrivere un poligono i cui lati passino per punti dati.

Soluzione. — Si tratti per es. di inscrivere un triangolo, i cui lati passino ordinatamente per tre punti dati S_1, S_2, S_3 (fig. 143ª). Facciamo tre tentativi; cioè dal centro S_1 projettiamo tre punti arbitrari A, B, C della curva in A_1, B_1, C_1 sulla curva stessa, poi dal centro S_2 in A_2, B_2, C_2, poi dal centro S_3 in A', B', C' (sempre sulla curva). Siccome il punto di arrivo A' o B' o C' non coincide col punto di partenza corrispondente A o B o C, così in luogo di un triangolo inscritto, quale si domanda nell'enunciato del problema, avremo un poligono aperto AA_1A_2A', BB_1B_2B', CC_1C_2C'. Mediante le successive projezioni dai centri S_1, S_2, S_3, dalla serie di punti ABC... si deducono le serie $A_1B_1C_1$..., $A_2B_2C_2$..., $A'B'C'$...; perciò (Ni 158 *e*, 160 *e*) la serie ABC... de' punti di partenza e la serie $A'B'C'$... de' punti di arrivo sono projettive (N° 157). Ma il problema sarebbe risoluto se il punto d'arrivo coincidesse col punto di partenza; dunque, se le due serie projettive ABC..., $A'B'C'$... hanno punti uniti, ciascuno di questi potrà servire di primo vertice ad un triangolo soddisfacente alle condizioni proposte. Si trovi adunque (N° 157, *b*) la retta in cui si segano le coppie di lati opposti dell'esagono inscritto $AB'CA'BC'$, e si costruiscano (N° 166) le intersezioni M, N di questa retta colla conica; ciascuna di esse darà una soluzione del problema [2].

174. Con metodo analogo si risolve il problema correlativo:

Ad una conica data [3] circoscrivere un poligono i cui vertici cadono su rette date.

Si tratti per es. di circoscrivere alla conica un triangolo, il quale debba avere i suoi vertici nelle rette s_1, s_2, s_3 (fig. 144ª). In un punto arbitrario A della conica si conduca la tangente a sino ad incontrare s_1 in un punto, e da esso si tiri un'altra tangente a_1 (punto di contatto A_1); questa incontrerà s_2 in un punto, dal quale si condurrà la seconda tangente a_2 (punto di contatto A_2); e dal punto comune a questa ed alla retta s_3 si tirerà di nuovo la tangente a', il cui punto di contatto sia A'. Il problema sarebbe risoluto se il punto A' coincidesse con A, cioè se coincidessero le tangenti

[1] Interamente descritta, o individuata da cinque punti dati.

[2] Poncelet, *l. c.*, p. 352.

[3] Interamente descritta, o individuata per mezzo di cinque tangenti date.

a, a'. Se s'imaginano fatti altri tentativi simiglianti, ne' quali si parta da altri punti arbitrari B, C,... della conica, si otterranno successivamente le serie di punti ABC...; $A_1B_1C_1$..., $A_2B_2C_2$..., $A'B'C'$.., , che sono tutte projettive fra loro. Infatti, sono projettive la prima e la seconda serie (N° 160, f) perchè le tangenti in A ed in A_1, in B ed in B_1, in C ed in C_1,... si segano sempre su s_1; così pure sono projettive la seconda e la terza, la terza e la quarta, epperò la prima e la quarta (N° 158, e). E siccome il problema sarebbe risoluto se coincidessero A ed A', ovvero B e B', ecc., così ciascuno de' punti uniti delle serie projettive ABC..., $A'B'C'$... potrà servire di punto di contatto al primo lato di un triangolo soddisfacente alle proposte condizioni. Basterà pertanto (N° 157, c) fare tre tentativi, cioè, assunti tre punti arbitrari A, B, C nella conica, dedurne i punti corrispondenti A', B', C'; e costruire i punti M, N comuni alla conica ed alla retta che contiene i punti d'intersezione dei lati opposti dell'esagono inscritto $AB'CA'BC'$ (1).

175. Il caso particolare che, nel problema del N° 173, i punti fissi S_1, S_2, ... siano tutti in una stessa retta s, dev'essere trattato separatamente.

Se il numero dei lati del poligono cercato è pari, siccome ha luogo il teorema del N° 146, a), così il problema ammetterà in questo caso nessuna soluzione o infinite soluzioni. Inscrivasi nella conica un poligono, per es. un ottagono (fig. 108ª) i cui primi sette lati passino pei punti dati S_1, S_2,... S_7; l'ultimo lato passerà allora, in virtù di quel teorema, per un punto fisso S di s, che non è arbitrario, bensì determinato dai punti dati S_1, S_2,... S_7. Dunque, se l'ultimo punto dato S_8 coincide con S, vi sono infiniti ottagoni che soddisfanno alle poste condizioni; se tale coincidenza non ha luogo, non v'è alcuna soluzione.

Se il numero de' lati del poligono domandato è dispari, il problema è determinato. Supponiamo che si tratti di inscrivere un ettagono (fig. 108ª) i cui lati debbano passare pei punti dati S_1, S_2,... S_7 in linea retta. Pel citato teorema (N° 146, a) vi sono infiniti ottagoni i cui primi sette lati passano per sette punti dati; e l'ottavo lato passa per un punto fisso S della medesima retta. Se fra questi ottagoni ve n'ha uno pel quale l'ottavo lato sia una tangente della conica, il problema sarà risoluto, giacchè un tale poligono, avendo due vertici infinitamente vicini o coincidenti, si ridurrà propriamente ad un ettagono inscritto, i cui lati passano pei sette punti dati. Dunque, se da S si possono condurre tangenti alla conica, il punto di contatto di ciascuna di esse darà una soluzione (N° 146, b). Ond'è che le soluzioni sono due, una o nessuna, a seconda della posizione del punto S rispetto alla conica (2).

La fig. 110ª si riferisce al caso di questo problema in cui si tratti d'inscrivere un triangolo (3).

(1) Poncelet, *l. c.*, p. 354. (2) Poncelet, *l. c.*, p. 356.
(3) Pappo, *l. c.*, VII, 117.

Lo studioso può esercitarsi a risolvere il problema correlativo (circoscrivere ad una conica un poligono, i cui vertici cadano su rette date di un fascio), il quale del pari è indeterminato o impossibile se il poligono è d'ordine pari; determinato e di 2° grado, se il poligono è d'ordine dispari (fig. 109ª e 111ª).

176. Lemma. — Se due coniche si segano nei punti $ABCC'$, e per A, B si tirino risp. due rette a segare la prima conica in F, G e la seconda in F', G', le corde FG, $F'G'$ concorrono in un punto H della retta CC' (fig. 145ª).

Infatti, la trasversale CC' incontra la prima conica e i lati opposti del quadrangolo inscritto $ABGF$ in sei punti accoppiati in involuzione (N°. 143, a sinistra); e la stessa cosa vale per la seconda conica e pel quadrangolo inscritto $ABG'F'$. Ma le due involuzioni coincidono (N° 98), giacchè hanno due coppie comuni di punti conjugati, vale a dire: la coppia de' punti CC' in cui la trasversale sega l'una e l'altra conica; e la coppia de' punti in cui quella incontra i lati opposti AFF', BGG' che appartengono ad entrambi i quadrangoli. Dunque ogni altra coppia di punti conjugati sarà comune alle due involuzioni: cioè la trasversale CC' incontrerà FG ed $F'G'$ in uno stesso punto H, conjugato a quello in cui incontra AB.

a) La proposizione che precede, semplice corollario del teorema di Desargues, suggerisce immediatamente la soluzione de' due seguenti problemi, l'uno di 1°, l'altro di 2° grado.

Problema. — Dati sette punti $ABCDEFG$, trovare il quarto punto comune alle due coniche risp. circoscritte ai pentagoni $ABCDE$, $ABCFG$ (fig. 145ª).

Da due de' punti comuni tirinsi le AF, BG che seghino la prima conica in F', G': punti che si sanno costruire (N° 124, a destra). Le rette FG, $F'G'$ concorreranno in un punto H della corda che unisce gli altri due punti comuni. Questa corda sarà adunque HC, e basterà costruire il punto C' in cui essa incontra l'una o l'altra conica: il punto C' sarà il cercato.

b) Problema. — Dati otto punti $ABDEFGMN$, trovare i due punti di ulteriore intersezione delle due coniche risp. circoscritte ai pentagoni $ABDEN$, $ABFGM$ (fig. 145ª).

Si tirino le AF, BG che seghino la prima conica in F', G'; il punto H comune alle FG, $F'G'$ apparterrà alla corda che unisce i due punti cercati. Analogamente, se AM sega di nuovo la prima conica in M', il punto K comune alle GM, $G'M'$ sarà situato nella corda medesima. Dunque i punti cercati giacciono nella HK; ed ora il problema è ridotto a quello (N° 166) di costruire le intersezioni C, C' dell'una o dell'altra conica colla retta HK [1].

c) La costruzione non cambia, se i punti A, B sono infinitamente vicini; cioè, se le due coniche toccano in un punto dato una retta data (N° 142).

In questo caso, date due coniche che si tocchino in un punto A, si

[1] Gaskin, *The geometrical construction of a conic section etc.* (Cambridge 1852), pag. 26, 40.

ottiene la retta HK congiungente i due punti C, C' d'intersezione. Se questa retta venisse a passare per A, uno de' punti C, C' coinciderebbe collo stesso A, giacchè una conica non può avere tre punti in linea retta. Allora, si può dire che de' quattro punti comuni alle due coniche, tre sono riuniti (o infinitamente vicini) in A (cfr. N° 142); si suol anche dire che le due coniche si osculano nel punto A. La costruzione *a*) dà un punto H della retta che congiunge A col quarto punto C d'intersezione. Può finalmente accadere che questa retta coincida colla tangente in A; allora si dirà che A fa le veci di quattro punti coincidenti (o infinitamente vicini) comuni alle due coniche.

d) Si applichi il lemma ad una conica data e ad un cerchio che la tocchi nel punto A. Da A si tiri la normale (cioè la perpendicolare alla tangente in A), la quale incontri di nuovo la conica in F ed il cerchio in F': e si descriva sul diametro AF un cerchio, il quale, essendo tangente in A e segante in F, segherà la conica in un altro punto G: e l'angolo AGF sarà retto. Il primo cerchio tagli AG in G': in virtù del lemma, le FG, $F'G'$ concorreranno sulla corda HK. Ma FG, $F'G'$ sono parallele, perchè anche l'angolo $AG'F'$ è retto; dunque per tutt'i cerchi tangenti in A alla conica la corda HK ha una direzione costante, cioè la direzione di FG.

Se la corda HK passa per A, il cerchio sarà osculatore alla conica in A. Laonde conducasi per A la parallela ad FG, che seghi la conica in C: il cerchio tangente in A e segante in C sarà il cerchio osculatore in A [1].

Viceversa, si può costruire la conica che passi per tre punti dati A, P, Q, ed in A abbia un dato cerchio osculatore. Le AP, AQ seghino il cerchio dato in P'; Q'; e sia U il punto di concorso delle PQ, $P'Q'$. Tirisi la AU, che seghi di nuovo il cerchio in C; la conica cercata passerà per C, epperò è determinata dai quattro punti A, P, Q, C e dalla tangente in A (la tangente del cerchio).

e) La proposizione correlativa del lemma precedente si enuncia così:

Se a, b sono due tangenti comuni a due coniche, e si conducano da due punti presi risp. in a, b le tangenti f, g alla prima conica, e le tangenti f', g' alla seconda, i punti fg, $f'g'$ saranno in linea retta col punto di concorso delle altre due tangenti comuni alle coniche date.

La qual proposizione serve a risolvere i problemi correlativi de' due *a*) e *b*), cioè a trovare le restanti tangenti comuni (una o due) di due coniche, ciascuna individuata da cinque tangenti date, fra le quali ve ne siano già tre o due di comuni.

177. Problema. — Dati undici punti $A, B, C, D, E, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, P$, costruire per punti la conica che passa per P e pei quattro punti (non dati) comuni alle coniche (non descritte) $ABCDE$, $A_1B_1C_1D_1E_1$ [2].

[1] Poncelet, *l. c.*, N[i] 334-7. [2] Poncelet, *l. c.*, N° 389.

Si conduca per P una trasversale arbitraria, e si costruiscano (N° 166, a sinistra) i punti M, M' comuni ad essa ed alla conica $ABCDE$, ed i punti N, N' comuni alla trasversale medesima ed alla conica $A_1B_1C_1D_1E_1$. Siccome queste due coniche e la cercata debbono essere circoscritte ad un medesimo quadrangolo, così avrà luogo il teorema di Desargues. Dunque, se si costruirà (N° 102, a sinistra) il punto P' conjugato di P nell'involuzione determinata dalle coppie MM' . NN', il punto P' apparterrà alla conica cercata. Facendo girare la trasversale intorno a P, si otterranno altri punti della conica medesima.

178. Problema. — Dati dieci punti $A, B, C, D, E, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1$ ed una retta s, costruire una conica che tocchi s e passi pei quattro punti (non dati) comuni alle coniche (non descritte) $ABCDE$, $A_1B_1C_1D_1E_1$.

Si costruiscano (N° 166, a sinistra) i punti MM' comuni ad s ed alla conica $ABCDE$, ed i punti NN' comuni ad s ed alla conica $A_1B_1C_1D_1E_1$; e si trovino i punti doppi dell'involuzione determinata dalle coppie MM', NN'. Se P è uno de' punti doppi, sarà P il punto di contatto (N° 145) fra s ed una conica circoscritta al quadrangolo formato dai quattro punti comuni alle coniche $ABCDE$, $A_1B_1C_1D_1E_1$. Dunque il problema è ora ridotto a quello del N° precedente.

179. Le costruzioni correlative dànno le soluzioni de' problemi correlativi:

Costruire una conica che passi per un punto dato o tocchi una retta data e sia inscritta nel quadrilatero formato dalle quattro tangenti (non date) comuni a due coniche (non descritte), ciascuna delle quali sia individuata per mezzo di cinque tangenti.

180. Problema. — Da un punto dato S condurre una retta che da quattro rette date a, b, c, d sia segata in quattro punti il cui rapporto anarmonico sia dato.

Si è veduto (N° 115, b') che le rette, le quali da quattro rette $abcd$ date sono segate in quattro punti di dato rapporto anarmonico, sono tutte tangenti ad una stessa conica, che tocca anche le rette date; e che, se D è il punto di contatto di d, e A, B, C siano i punti ove d sega a, b, c, il rapporto anarmonico $(ABCD)$ è uguale a quello de' quattro punti in cui le $abcd$ sono incontrate da un'altra tangente qualsivoglia della conica. Dunque la soluzione del problema sarà la seguente:

Costruiscasi (N° 53, f) quel punto D della retta d, il quale insieme coi punti $ad \equiv A$, $bd \equiv B$, $cd \equiv C$ dà il rapporto anarmonico $(ABCD)$ uguale al dato. Indi (N° 166, a destra) costruiscansi le rette che passano per S e toccano la conica individuata dalle quattro tangenti $abcd$ e dal punto di contatto D in d; ciascuna di codeste rette risolverà il problema proposto.

a) Se una delle rette $abcd$ fosse a distanza infinita, il problema diverrebbe il seguente (N° 53, e):

Per un punto dato S condurre una retta tale, che i suoi segmenti intercetti fra tre rette date a, b, c (cioè fra a e b, fra a e c) siano fra loro in un rapporto dato.

Si trovi in a quel punto A che insieme coi punti $ab \equiv B$, $ac \equiv C$ dà al rapporto $AB : AC$ il valore dato, e conducansi da S le tangenti alla parabola determinata dalle tangenti a, b, c e dal punto di contatto A in a.

b) La costruzione correlativa darà la soluzione del problema correlativo: In una retta data s trovare un punto dal quale quattro punti dati A, B, C, D si projettino mediante raggi il cui rapporto anarmonico (N° 53, *k*) sia un numero dato.

181. PROBLEMA. — Date due rette u, u' punteggiate projettive, trovare due segmenti corrispondenti, i quali siano rispettivamente veduti da due punti dati O, O' sotto angoli dati (1). Prendansi in u' due punti A', D' in modo che l'angolo $A'O'D'$ sia uguale al secondo dei dati; siano A, D i punti di u che corrispondono ad A', D'; e trovisi in u il punto A_1 tale che l'angolo A_1OD sia uguale al primo dei dati; è chiaro che il problema sarebbe risoluto, se OA_1 coincidesse con OA, giacchè allora gli angoli AOD, $A'O'D'$ sarebbero entrambi uguali ai dati. Variando simultaneamente i raggi OA, $O'A'$, $O'D'$, OD, OA_1, si generano de' fasci tutti projettivi fra loro. Infatti, sono projettivi i fasci generati da $O'A'$, $O'D'$, e quelli generati da OA_1, OD, a cagione degli angoli costanti $A'O'D'$, A_1OD (N° 82); e sono projettivi i fasci generati da OA, $O'A'$, e quelli generati da OD, $O'D'$, a cagione della supposta projettività fra u ed u'. Dunque sono projettivi i fasci generati dai raggi OA, OA_1; e i raggi uniti risolveranno il problema. Facciansi adunque tre tentativi analoghi al precedente, sicchè si ottengano tre coppie di raggi corrispondenti OA ed OA_1, OB ed OB_1, OC ed OC_1; e costruiscansi i raggi uniti dei fasci projettivi concentrici determinati dalle tre coppie (N° 162, *a*). Se uno de' raggi uniti incontra u in M, e prendasi nella stessa u il punto P in modo che l'angolo MOP risulti uguale al primo dei dati, detti M', P' i punti di u' che corrispondono ad M, P, anche l'angolo $M'O'P'$ sarà uguale al secondo dei dati, cioè il problema sarà risoluto.

182. PROBLEMA. — Date due punteggiate projettive $u \equiv ABC\ldots$, $u' \equiv A'B'C'\ldots$, trovare due segmenti corrispondenti, i quali siano uguali a segmenti dati (in grandezza e senso).

Prendansi in u' un segmento $A'D'$ uguale al secondo segmento dato, e quindi in u il segmento AD corrispondente ad $A'D'$. In u assumasi il punto A_1, in modo che A_1D sia uguale al primo segmento dato; il problema sarebbe risoluto se i punti A, A_1 coincidessero. Variando simultaneamente i punti A, A', D', D, A, generano altrettante punteggiate projettive: infatti, sono projettive le punteggiate generate da A ed A', e quelle generate da D e D', a cagione della supposta projettività di u, u'; e sono projettive le punteggiate descritte da A_1 e D, e quelle descritte da A', D', perchè nascono dal movimento di segmenti costanti (N° 77). Dunque sono projettive le pun-

(1) Cioè, se i segmenti sono MP, $M'P'$, gli angoli MOP, $M'O'P'$ siano dati in grandezza e in senso.

teggiate generate da A, A_1; ed i loro punti uniti risolveranno il problema. Basterà pertanto ottenere tre coppie di punti corrispondenti A ed A_1, B e B_1, C e C_1, mediante tre tentativi; e quindi costruire i punti uniti (N° 162, *b*).

183. Allo studioso non sarà certamente sfuggita la costanza del metodo col quale sono stati risoluti i precedenti problemi, sì diversi ne' loro enunciati. È un metodo generale, uniforme e diretto, applicabile in forma più o meno semplice a tutti i problemi di 2° grado, cioè a tutte le questioni che, ove fossero trattate algebricamente, dipenderebbero da un'equazione di 2° grado o da un'equazione di grado superiore riducibile al 2°. Il metodo consiste nel fare tre tentativi, i quali dànno tre coppie di elementi corrispondenti di due forme projettive sovrapposte; e gli elementi uniti forniscono senz'altro le soluzioni del problema. Perciò a buon diritto, questo modo di procedere fu considerato come un metodo geometrico di falsa posizione (¹).

184. I problemi di 2° grado (o riducibili al 2° grado), come tutti quelli della geometria elementare, si risolvono coll'uso esclusivo della riga e del compasso, cioè mediante intersezioni di rette e di cerchi (²). Ma d'altra parte, ciascuno di quei problemi si può far dipendere dalla determinazione degli elementi uniti di due forme projettive sovrapposte: la quale determinazione si riduce (N° 162) alla costruzione dei punti uniti di due serie projettive (N° 157), date in un cerchio affatto arbitrario; laonde ne segue che un solo cerchio, descritto una volta per sempre, può bastare a risolvere tutt'i problemi di 2° grado (³) proposti intorno ad elementi dati in un piano fisso (il piano del disegno). Disegnato questo circolo, la quistione si ridurrà a trasportare sulla circonferenza di esso, mediante projezioni e sezioni, le tre coppie di punti individuanti le due forme projettive, i cui elementi uniti risolvono il problema; e quindi a tracciare la retta che contiene i punti d'incontro delle coppie di lati opposti dell'esagono inscritto che ha per vertici opposti i punti delle tre coppie anzidette (N° 157, *c*).

È superfluo accennare che, in luogo di far dipendere la soluzione del problema dagli elementi uniti di due forme projettive sovrapposte, si può sempre ridurlo alla ricerca degli elementi doppi di un'involuzione (N° 165).

Nel N° 89, *a*) si è già dato un esempio del modo di risolvere un problema di 2° grado coll'uso della sola riga, supposto che un cerchio (ausiliario) sia tracciato nel piano del disegno, e che sia dato il centro di questo cerchio. Altri esempi si troveranno più innanzi.

185. In modo analogo si risolvono i problemi seguenti:

a) Date (fig. 146ᵃ) due rette punteggiate projettive u, u', e due altre rette

(¹) Chasles, *Géom. sup.*, p. 212.

(²) Problemi di 1° grado sono quelli che si risolvono colla sola riga, cioè con intersezioni di sole rette. Veggansi: Lambert, *l. c.*, p. 161; — Brianchon, *l. c.*, p. 6; — Poncelet, *l. c.*, p. 76.

(³) Poncelet, *l. c.*, p. 187; — Steiner, *Die geometrischen Konstructionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises* (Berlin 1833), p. 67.

punteggiate projettive v, v', per un punto dato O tirare due rette s, s' che seghino rispettivamente u ed u' in due punti corrispondenti, ed anche v, v' in due punti corrispondenti.

Tirisi per O una retta che seghi u', v' in A', P'; sia A il punto di u che corrisponde ad A'; e P il punto di v che corrisponde a P'. Il problema sarebbe risoluto, se le rette OA, OP coincidessero insieme. Variando simultaneamente queste rette descrivono due fasci projettivi concentrici (determinati da tre tentativi analoghi al suesposto), i cui raggi uniti daranno le soluzioni del problema.

b) Nel problema che precede si può supporre che u ed u' siano sovrapposte, e che siano pur sovrapposte v, v'. Se tutte e quattro le punteggiate fossero in una retta unica, il problema si potrebbe enunciare così:

Date in una retta due punteggiate projettive u, u' e due altre punteggiate projettive v, v', trovare una coppia di punti che siano corrispondenti sì in u, u', sì in v, v'.

c) Fra due rette date u, u_1 allogare un segmento che sia veduto da due punti fissi O, S sotto angoli dati (fig. 147ª).

Per S tirinsi due rette a segare u, u_1 in A, A_1 così che l'angolo ASA_1 sia uguale al secondo dei dati. Indi si tiri per O un'altra retta a segare u in A', in modo che l'angolo $A'OA_1$ sia uguale al primo dei dati. Il problema sarebbe risoluto se OA, OA' coincidessero. Tre tentativi come questo daranno tre coppie di raggi corrispondenti (OA ed OA', OB ed OB', OC ed OC') dei due fasci projettivi che sarebbero descritti dalla variazione simultanea di OA, OA'; dai raggi uniti OM, ON di questi fasci si hanno le soluzioni (MM_1, NN_1) del problema.

d) Date due punteggiate projettive u, u', a partire da due dati punti corrispondenti A, A', prendere due segmenti corrispondenti AM, $A'M'$, il cui rapporto $AM : A'M' = \lambda$ sia dato.

Essendo A ed A', B e B', C e C' tre coppie di punti corrispondenti in u, u', prendansi in u due nuovi punti B'', C'' in modo che sia $AB'' = \lambda . A'B'$, $AC'' = \lambda . A'C'$. I punti $AB''C''$ ... determinano una punteggiata simile ad $A'B'C'$ ... (N° 73), epperò una punteggiata projettiva ad ABC .... Le punteggiate projettive sovrapposte $AB''C''$ ..., ABC ... hanno già il punto unito A; l'altro punto unito M risolverà il problema, giacchè si avrà

$$AM = AM'' = \lambda . A'M' .$$

Questo problema è di 1° grado.

e) Date due punteggiate projettive sovrapposte ABC..., $A'B'C'$..., trovare un segmento MM' che abbia un dato punto di mezzo O.

Prendansi i punti A'', B'', C'' in modo che O sia il punto di mezzo dei segmenti AA'', BB'', CC''; i punti $A''B''C''$ ... determinano una punteggiata uguale ad ABC ... epperò projettiva ad $A'B'C'$ .... Costruiscansi i punti uniti

delle punteggiate projettive sovrapposte $A'B'C'\ldots$, $A''B''C''$; se M' o M'' è uno di codesti punti uniti, sarà O il punto di mezzo del segmento MM'

f) Dato un segmento EF, trovare nella retta EF due punti M, M' tali che il segmento MM' sia uguale a un dato, e il rapporto anarmonico $(EFMM')$ sia pure dato.

Nella retta data prendansi tre punti ad arbitrio A, B, C, e quindi si determinino i tre punti A', B', C' in modo che i rapporti anarmonici $(EFAA')$, $(EFBB')$, $(EFCC')$ siano tutti uguali al dato; e tre altri punti A'', B'', C'' in modo che i segmenti AA'', BB'', CC'' siano uguali al dato. Allora saranno (N° 61, 83 *c*) projettive le punteggiate $ABC\ldots$, $A'B'C'\ldots$, e projettive anche (N° 77) le punteggiate $ABC\ldots$, $A''B''C''\ldots$, dunque projettive eziandio le $A'B'C'\ldots$, $A''B''C''\ldots$. Se queste hanno due punti uniti, uno de' quali sia M' od M'', detto M il punto corrispondente ad esso nella punteggiata $ABC\ldots$, il segmento MM' ed il rapporto anarmonico $(EFMM')$ avranno le grandezze date, epperò il problema sarà risoluto.

g) Inscrivere in un triangolo dato PQR un rettangolo di area data (fig. 148ª).

Se $MSTU$ è il rettangolo cercato, conducendo MS' parallela a PR, si ottiene il parallelogrammo $MSPS'$ equivalente al rettangolo; dunque possiamo trasformare il problema in quest'altro:

Trovare su QR un tal punto M che, tirate MS, MS' parallele rispettivamente a PQ, PR, risulti $PS \,.\, PS'$ uguale ad un quadrato dato k^2.

Preso ad arbitrio un punto A in QR, si tiri AD parallela a PQ, e prendasi in PQ la PD' tale che sia $PD \,.\, PD' = k^2$; tirisi poi la $D'A'$ parallela a PR. Se i punti A, A' coincidessero, il problema sarebbe risoluto.

Variando insieme i punti A, D, D', A' descrivono altrettante punteggiate projettive. Infatti, siccome D è la projezione di A dal punto all'infinito di PQ, ed A' la projezione di D' dal punto all'infinito di PR, così la seconda punteggiata è prospettiva alla prima e la quarta alla terza. E sono pur projettive la seconda e la terza punteggiata, giacchè la relazione

$$PD \,.\, PD' = k^2,$$

che lega insieme i punti D, D', confrontata con quella ottenuta al N° 59 mostra che i punti D, D', variando simultaneamente, descrivono due punteggiate projettive, ai cui punti all'infinito corrisponde uno stesso punto P (1).

Tre tentativi, analoghi al suesposto, daranno tre coppie di punti come A, A'; e quindi, costruiti i punti uniti, si otterranno le soluzioni del problema. Invece di prendere, ne' tre tentativi, il punto di partenza A del tutto ad arbitrio, gli si può dare qualche posizione particolare, che abbrevii le

(1) Cioè, dette u, u' le due punteggiate, riferite alla costruzione del N° 67 a sinistra, la punteggiata ausiliaria u'' è tutta all'infinito. Ne segue che ottenuta una coppia D, D' di punti corrispondenti, per trovare il punto E' corrispondente ad un altro punto E di $PR \equiv u$, basta unire $D'E$ e quindi tirare DE' parallela a $D'E$.

costruzioni. Questa riflessione vale per qualsiasi problema de' qui considerati; quanto all'attuale, si vede subito che, se A si porta a distanza infinita, va all'infinito anche la projezione D, epperò il punto D' cade in P, donde segue che A' coinciderà con R; e se il punto A si pone in Q, la projezione D coincide con P, dunque D' epperò A' va all'infinito. Ecco pertanto due tentativi che non domandano alcuna costruzione: le coppie AA' che ne risultano sono R ed il punto all'infinito, il punto all'infinito e Q. Detta BB' la coppia data da un terzo tentativo, ed AA' una coppia qualsivoglia, avremo dunque (N° 59)

$$RA \,.\, QA' = RB \,.\, QB',$$

epperò, se M è un punto unito,

$$RM \,.\, QM = RB \,.\, QB' \,.$$

Di qui si possono cavare i punti uniti; ma sarà sempre più semplice ricorrere alla costruzione generale del N° 162, *b*); cioè per un punto O di una circonferenza descritta ad arbitrio, tirinsi OB, OB', OR, OQ e la parallela a QR, che seghino di nuovo il circolo in B_1, B_1', R_1, Q_1, I [1]; indi congiungasi il punto comune alle B_1Q_1, $B_1'I$ col punto comune alle B_1I, $B_1'R_1$; se la congiungente sega il circolo in due punti, le rette che li projettano da O incontreranno QR ne' punti uniti cercati M, N: i quali risolvono il problema.

h) Costruire un poligono i cui lati passino risp. per altrettanti punti dati, ed i cui vertici meno uno cadano su altrettante rette date, mentre l'angolo nell'ultimo vertice sia uguale ad un angolo dato.

Debbasi per es. costruire un triangolo LMN (fig, 149ª), i cui tre lati MN, NL, LM debbano passare risp. per O, U, V, e due vertici M, N debbano trovarsi sulle rette u, v. Conducasi per O una retta ad arbitrio che seghi u in A, v in B, e per U la retta UX che colla BV comprenda un angolo uguale al dato. Detto A' il punto in cui u è incontrata dalla UX, il problema sarebbe risoluto se i punti A, A' coincidessero. Si otterranno le soluzioni del problema costruendo i raggi uniti de' fasci projettivi generati dalla simultanea variazione delle rette OA, OA'.

k) Nel precedente problema è compreso quest'altro:

Un raggio di luce parte da un punto dato O e si riflette successivamente su n rette date $u_1, u_2, \ldots u_n$; determinare la direzione che deve avere il raggio iniziale, affinchè l'ultimo raggio riflesso la seghi sotto angolo dato.

Infatti, secondo le leggi della riflessione, se il raggio incidente OA_1 (fig. 150ª) incontra u_1 in A_1, il raggio riflesso ed il raggio incidente faranno angoli uguali (opposti) con u_1; epperò, siccome il raggio incidente passa pel punto fisso O, così il raggio riflesso passerà costantemente per quel punto O_1 che è simmetrico di O rispetto ad u_1 [2]. Analogamente, dopo che il primo raggio

[1] Di questi punti il solo I è segnato nella figura.

[2] Cioè un punto O_1 tale che OO_1 sia divisa per metà e ad angolo retto da u_1.

riflesso avrà incontrato u_2 in A_2, si rifletterà secondo la stessa legge, epperò il secondo raggio riflesso passerà per un punto fisso O_2, che sarà il simmetrico di O_1 rispetto ad u_2; e così di seguito. Il raggio iniziale e gli n successivi raggi riflessi saranno pertanto i lati di un poligono $A_1A_2A_3\ldots$, del quale gli $n+1$ lati devono passare per altrettanti punti dati $O, O_1, O_2, \ldots O_n$, mentre un angolo A dev'essere uguale ad un dato, ed i vertici degli altri n angoli devono cadere sulle n rette date u_1, u_2, u_n.

l) PROBLEMA. — Costruire un poligono i cui vertici giacciano in rette date e i cui lati siano veduti da punti dati sotto angoli dati.

Si tratti per es. di costruire un triangolo i cui vertici 1, 2, 3 debbano cadere sulle date rette u_1, u_2, u_3 ed i cui lati 23, 31, 12 siano veduti dai punti dati S_1, S_2, S_3 sotto angoli dati ω_1, ω_2, ω_3. Sulla u_1 (fig. 151ª) si prenda un punto A ad arbitrio; tirata la AS_3, si faccia l'angolo AS_3B uguale ad ω_3. Il 2° lato di quest'angolo seghi u_2 in B, e si faccia l'angolo BS_1C uguale ad ω_1. Detto C il punto comune al 2° lato di quest'angolo e ad u_3, si faccia l'angolo CS_2A' uguale ad ω_2. Il problema sarebbe risoluto, se il secondo lato S_2A' coincidesse con S_2A. Se facciamo variare S_2A intorno ad S_2, variano insieme gli altri raggi S_3A, S_3B, S_1B, S_1C, S_2C, S_2A', generando altrettanti fasci, tutti projettivi fra loro. Infatti: sono projettivi i fasci generati da S_3A, S_3B (N° 82), perchè l'angolo AS_3B è costante; sono projettivi i fasci generati da S_3B, S_1B, perchè prospettivi; e così di seguito. Le soluzioni del problema saranno adunque date dai raggi uniti de' fasci projettivi concentrici generati da S_2A, S_2A'.

Nello stesso modo si risolve il problema, se gli angoli in S_1, S_2, in luogo di essere uguali ad angoli dati, debbano essere divisi da coppie di rette date, in modo che in ciascuno di quei punti si abbia un fascio di quattro raggi di rapporto anarmonico dato. Se per ciascuno de' punti dati S_1, S_2, ... il fascio dovesse essere armonico, e i due raggi dati fossero ortogonali, il problema si potrebbe enunciare così (N° 52):

Costruire un poligono, i cui vertici debbano cadere su rette date e i cui lati debbano essere veduti da punti dati sotto angoli aventi bissettrici date.

m) Lo stesso metodo dà la soluzione del problema:

Costruire un poligono i cui lati debbano passare per punti dati e i cui angoli dividano segmenti dati secondo rapporti anarmonici dati [1];

Del quale si hanno casi particolari, supponendo che ciascun angolo debba intercettare sopra una retta data un segmento dato di grandezza e senso, o un segmento che risulti diviso da un punto dato in parti di rapporto dato [2].

[1] Cioè, i lati di un angolo incontrino una data retta, nella quale sono dati due punti A, B, in altri due punti C, D, in modo che il rapporto anarmonico $(ABCD)$ sia un numero dato.

[2] Questi problemi sono tolti da CHASLES, *Géom. sup.*, pag. 219-23, e da TOWNSEND, *Chapters on the modern geometry* (Dublin 1865), v. 2, pag. 257-74.

§ 20. Poli e polari.

186. Dai N[i] 160, 161 risulta che, se S (fig. 120ª) è un punto situato comunque nel piano di una conica, condotte per S quante trasversali si vogliano a segare la curva nelle coppie di punti (A, A'), (B, B'), (C, C'),..., le coppie di tangenti (a, a'), (b, b'), (c, c'),... si segano in punti di una retta fissa s, la quale contiene i punti di contatto delle tangenti che escono da S; ed inoltre anche le coppie di congiungenti AB' ed $A'B$, AC' ed $A'C$,..., BC' e $B'C$,..., AB ed $A'B'$, AC ed $A'C'$,..., BC e $B'C'$,... si segano in punti di s. Si può osservare un'altra proprietà della retta s: considerando il quadrangolo completo $AA'BB'$, i due lati opposti AB, $A'B'$ sono separati armonicamente dal punto diagonale S e dalla retta s che unisce gli altri due (N° 49); dunque i punti A ed A' (ed analogamente B e B', C e C',...) sono separati armonicamente mediante S ed s.

La retta s, che è in tal modo individuata dal punto arbitrariamente dato S, dicesi polare di S rispetto alla conica; e viceversa S dicesi polo della retta s.

Dunque la retta polare di un dato polo S è ad un tempo: 1° il luogo del punto di concorso di due tangenti i cui punti di contatto siano in linea retta con S; 2° il luogo dei punti di concorso delle coppie di lati opposti d'ogni quadrangolo inscritto, le cui diagonali passino per S; 3° il luogo di un punto separato armonicamente da S mediante due punti della conica (1).

187. Reciprocamente, una retta s data ad arbitrio individua un punto S, del quale essa è la polare. Infatti: siano A, B due punti scelti ad arbitrio nella conica; le rette a, b, tangenti in A, B, segheranno s in due punti, dai quali si conducano le seconde tangenti a', b'; e siano A', B' i loro punti di contatto, ed S il punto d'intersezione delle AA', BB'. Allora la polare di S conterrà i punti aa', bb', epperò coinciderà con s. Dunque, se da un altro punto qualunque di s si possono condurre due tan-

(1) Apollonio, *l. c.*, lib. VII, 37; — Desargues, *l. c.*, p. 164 e seg. — Delahire, *l. c.*, lib. I e II.

genti c, c', la retta CC' congiungente i punti di contatto passerà per S.

a) Le rette $aa'bb'$ formano un quadrilatero circoscritto, una diagonale del quale è s, mentre le altre due diagonali si segano in S (N° 135); dunque: se da un punto arbitrario di s si conducono due tangenti alla conica, queste sono separate armonicamente mediante s ed una retta che passa sempre per S.

b) Il quadrangolo completo $AA'BB'$ ed il quadrilatero completo $aa'bb'$ hanno lo stesso triangolo diagonale (N° 132), i vertici del quale sono S, il punto comune alle AB, $A'B'$, ed il punto comune alle AB', $A'B$; ed i lati sono s, la congiungente i punti ab, $a'b'$, e la congiungente i punti ab', $a'b$. Dunque: se da due punti della retta s si guidano le coppie di tangenti (a, a'), (b, b'), le diagonali del quadrilatero circoscritto $aba'b'$ passano pel punto S. Veggasi per es. la fig. 102ª dove s'imaginino poste le lettere S, A', B', a', b' invece delle E, D, C, d, c, ovvero le lettere S, A', B, B', a', b, b' invece delle G, B, C, D, b, c, d.

188. Per tal modo, data una conica, ogni punto del piano ha la sua polare, ogni retta ha il suo polo [1]. La conica data, rispetto alla quale si considerano i poli e le polari, dicesi conica fondamentale.

a) Un punto del piano di una conica si dice esterno od interno alla curva, secondo che per esso passino, o no, due tangenti. Dunque:

Se il polo è esterno alla conica (N° 160, *d*), la polare sega la curva (ne' punti di contatto delle tangenti che escono dal polo).

Se il polo è interno alla conica, la polare non incontra la curva in alcun punto.

b) Se si assume come polo un punto della conica stessa, facendo girare intorno ad esso una trasversale, uno de' punti di segamento cade costantemente nel polo, epperò in ogni coppia di tangenti, il cui punto di concorso dee generare la polare, una tangente è sempre la tangente nel polo. Dunque, se il polo è un punto della conica, la polare è la tangente in questo punto.

c) Viceversa, se la polare ha tutt'i suoi punti esteriori alla co-

[1] Desargues, *l. c.*, p. 190.

nica, il polo è un punto interno; se la polare è una secante della curva, il polo è il punto comune alle rette che toccano questa ne' due punti d'intersezione; e se la polare è una tangente, il polo è il punto di contatto.

189. Sia E il polo ed F un punto della polare (fig. 102ª). Se la retta EF sega la conica, le due intersezioni saranno separate armonicamente mediante i punti E, F (epperò di questi punti uno sarà interno, l'altro esterno alla curva), così che, se consideriamo invece F come polo, sarà E un punto della polare.

Se la retta EF non sega la conica, condotte le due tangenti da F, la corda di contatto passerà per E, appunto come la corda di contatto delle tangenti che escono da E passa per F, giacchè quest'ultima corda è la polare di E. Dunque:

Se F è un punto della polare di E, viceversa E è un punto della polare di F.

Lo stesso teorema si può esprimere col dire:

Se f è una retta che passi pel polo di un'altra retta e, viceversa e passerà pel polo di f.

Infatti, siano E, F i poli rispettivi di e, f; siccome per ipotesi E è situato nella polare di F, così F giacerà nella polare di E, cioè e passerà per F, polo di f.

Due punti, come E ed F, l'uno de' quali sia nella polare dell'altro, diconsi conjugati o reciproci rispetto alla conica. E così pure, diconsi conjugate o reciproche due rette, come e, f, ciascuna delle quali passi pel polo dell'altra.

Dal teorema or ora dimostrato segue poi quest'altro enunciato:

Se due punti sono reciproci, anche le loro polari sono rette reciproche, e viceversa.

190. Il medesimo teorema si può anche porre sotto quest'altra forma:

Ogni punto della polare di un dato punto E ha per polare una retta che passa per E;

Ogni retta passante pel polo di una data retta e ha per polo un punto di e (1).

Vale a dire: se imaginiamo che un polo variabile F corra su di una data retta e, la polare di F passerà sempre per un punto

(1) DESARGUES, *l. c.*, p. 191.

fisso E, che è il polo della retta data; e viceversa, se una retta f varia girando intorno ad un punto fisso E, il polo di f descriverà una linea retta e, che è la polare del punto dato E.

O ancora: si può dire che il polo di una data retta e è il centro del fascio delle polari dei punti di e; e che la polare di un dato punto E è il luogo dei poli delle rette che passano per E (1).

191. Dato un polo S, se ne debba costruire la polare.

a) Se della conica sono dati cinque punti A, B, C, D, E, basterà tirare due trasversali SA, SB, e costruire i punti A', B', in cui questi incontrano di nuovo la curva. La retta s che unisce il punto comune alle AB', $A'B$ col punto comune alle AB, $A'B'$ sarà la polare del punto dato (N° 169, fig. 136ª).

b) La conica sia invece individuata da cinque tangenti a, b, c, d, e (fig. 153ª). Conducansi per S due trasversali u, v. e trovinsi i poli U, V di queste. La retta UV sarà la polare di S (N° 190). Per maggior semplicità, converrà condurre la trasversale u pel punto ab; costruita la tangente c' che passa pel punto uc, il polo U sarà il punto comune alle diagonali del quadrilatero $acbc'$. E così pure, condotta la trasversale v, per es. pel punto ac, e costruita la tangente b' che passa pel punto vb, il polo V sarà il punto comune alle diagonali del quadrilatero $abcb'$.

Data una retta s, se ne debba trovare il polo.

Se della conica sono date cinque tangenti a, b, c, d, e, basterà prendere i punti sa, sb, e da essi tirare le seconde tangenti a', b' (N° 124, a sinistra). Le diagonali del quadrilatero $aba'b'$ si segheranno in un punto S, che è il polo della retta data (fig. 152ª).

La conica sia invece individuata da cinque punti A, B, C, D, E (fig. 154ª). Prendansi in s due punti U, V, e trovinsi le loro polari u, v. Il punto uv sarà il polo di s (N° 190). Per maggior semplicità, converrà prendere il punto U nella retta AB; costruita l'intersezione C' della conica colla retta UC, la polare u sarà la congiungente de' punti di concorso de' lati opposti del quadrangolo $ACBC'$. E così pure, preso il punto V per es. nella retta AC, e costruita l'intersezione B' della conica colla retta VB, la polare v sarà la congiungente de' punti di concorso de' lati opposti del quadrangolo $ABCB'$.

192. Siano E, F due punti reciproci (fig. 102ª) e sia G il polo della retta EF; sarà G un punto reciproco sì a E, sì a F; cioè, i tre punti EFG sono reciproci a due a due. Ne segue che ciascun lato del triangolo EFG è la polare del vertice opposto, e che i tre lati sono a due a due rette reciproche.

(1) PONCELET, *l. c.*, N° 195.

Un triangolo, come EFG, nel quale ciascun vertice è il polo del lato opposto, dicesi **triangolo conjugato alla conica.**

193. Per costruire un triangolo conjugato, si può prendere un vertice E ad arbitrio (fig. 102ª); indi si costruisca la polare di E, e in questa si assuma ad arbitrio un punto F; da ultimo si costruisca la polare di F, la quale passerà per E, perchè EF sono punti reciproci. Sia G il punto in cui si segano le polari di E, F: saranno EG, FG coppie di punti reciproci, epperò EFG è un triangolo conjugato.

In altre parole, assunto ad arbitrio il punto E, si tirino per E due trasversali che seghino la conica in A e D, B e C; sia F il concorso delle AC, BD; e G il concorso delle AB, CD; sarà EFG un triangolo conjugato..

Si potrebbe invece prendere ad arbitrio una retta e, costruirne il polo E, tirare per E una retta qualunque f; e congiunti i poli di e, f mediante la retta g, sarebbe efg un triangolo conjugato, giacchè le rette e, f, g sono a due a due reciproche.

In altre parole, assunta ad arbitrio la retta e, prendansi in essa due punti dai quali partano le coppie di tangenti a e d, b e c; sia f la congiungente de' punti ac, bd; e g la congiungente de' punti ab, cd; sarà efg un triangolo conjugato.

194. Le cose che precedono mettono in evidenza la seguente proprietà:

a) **I punti diagonali del quadrangolo completo formato da quattro punti arbitrari della conica sono i vertici di un triangolo conjugato. Le rette diagonali del quadrilatero completo formato da quattro tangenti arbitrarie della conica sono i lati di un triangolo conjugato** (¹).

Od anche:

I punti diagonali di un quadrangolo completo sono i vertici di un triangolo conjugato a tutte le coniche circoscritte al quadrangolo. Le rette diagonali di un quadrilatero completo sono i lati di un triangolo conjugato a tutte le coniche inscritte nel quadrilatero.

b) Dalle proprietà dei quadrilateri circoscritti e dei quadrangoli inscritti (Nⁱ 129-135) si conclude inoltre (fig. 102ª):

Se EFG è un triangolo conjugato ad una conica data, e se ABC è un triangolo inscritto nella medesima, i cui lati AB, AC passino rispettivamente pei vertici G, F, il terzo lato BC passerà pel terzo vertice E; e ciascun lato

(¹) Desargues, *l. c.*, p. 186.

del triangolo inscritto sarà diviso armonicamente dal corrispondente vertice del triangolo conjugato e dalla retta che unisce gli altri due vertici.

Le tre rette EA, FB, CG concorrono in un punto D della curva: ne segue che i due triangoli sono omologici, epperò le tre coppie di rette FG e BC, GE e CA, EF ed AB si segheranno in tre punti in linea retta.

Si lascia allo studioso di enunciare la proposizione correlativa ([1]).

195. De' tre vertici di un triangolo conjugato EFG uno è sempre interno alla curva e gli altri due esterni. Infatti, se E è un punto interno, la polare di E non sega la conica, epperò F e G sono punti esterni; e se E è un punto esterno, la polare di E sega la curva, i punti di segamento sono separati armonicamente mediante F e G, epperò l'uno di questi punti sarà interno e l'altro esterno.

Da questa proprietà e da quelle del N° 188 si conclude tosto che dei tre lati di un triangolo conjugato due segano sempre la conica, ed uno non la incontra.

196. Due quadrangoli completi $ABCD$, $A'B'C'D'$ abbiano gli stessi punti diagonali E, F, G; cioè concorrano

$$\begin{array}{l} BC,\ AD,\ B'C',\ A'D' \text{ in } E, \\ CA,\ BD,\ C'A',\ B'D' \text{ in } F, \\ AB,\ CD,\ A'B',\ C'D' \text{ in } G. \end{array}$$

Se il punto A, giacesse per es. in AB, siccome $A'B'$ ed AB passano per G, così anche B' sarebbe situato in AB; e siccome AB od $A'B'$ dev'essere separata armonicamente da CD e anche da $C'D'$ mediante le GE, GF, così i punti $CDC'D'$, sarebbero in una sola retta, vale a dire gli otto punti $ABCDA'B'C'D'$ sarebbero in due rette (fig. 155ª).

Escluso questo caso, supposto cioè che pei cinque punti $ABCDA'$ si possa descrivere una conica, dico che essa contiene anche i punti $B'C'D'$ (fig. 156ª). Infatti, essendo G il polo di EF (perchè E, F, G sono i punti diagonali del quadrangolo inscritto $ABCD$), le due intersezioni della conica colla trasversale $GA'B'$ saranno separate armonicamente mediante il polo G e la polare EF. Ma una di queste intersezioni è A', dunque l'altra è B'; giacchè, essendo E, F, G i punti diagonali del quadrangolo $A'B'C'D'$, i punti $A'B'$

([1]) Poncelet, *l. c.*, p. 104.

sono separati armonicamente mediante G ed EF. Nello stesso modo si dimostra che anche i punti C', D' appartengono alla conica. Dunque:

Se due quadrangoli completi hanno gli stessi punti diagonali, gli otto vertici sono situati o in due rette o in una conica.

Siccome le rette $AB, A'B'$ concorrono in G, così le AA', BB', come pure le $AB', A'B$ si segheranno sulla EF, polare di G. Quest'osservazione dà il modo di costruire il punto B', quando siano dati $ABCDA'$. Poi, il punto C' si otterrà come intersezione delle $A'F, B'E$; ed il punto D' come intersezione delle $B'F$, $A'E, C'G$.

197. Suppongo ora che due coniche abbiano quattro tangenti comuni $abcd$, vale a dire, siano inscritte in uno stesso quadrilatero, e siano $ABCD$ i quattro punti di contatto per l'una, $A'B'C'D'$ i quattro punti di contatto per l'altra. In virtù del teorema del N° 132, il triangolo formato dalle diagonali del quadrilatero circoscritto $abcd$ avrà i vertici ne' punti diagonali del quadrangolo inscritto $ABCD$, ed anche ne' punti diagonali del quadrangolo $A'B'C'D'$; dunque i due quadrangoli $ABCD, A'B'C'D'$ hanno gli stessi punti diagonali. Quindi, pel teorema che precede (N° 196), gli otto punti $ABCDA'B'C'D'$ saranno tutti in due rette o in una conica.

198. Col solito scambio dei punti colle rette si potranno dimostrare le proposizioni correlative, cioè:

Se due quadrilateri completi hanno le tre diagonali comuni, gli otto lati o passano per due punti (quattro per l'uno e quattro per l'altro) o sono tangenti di una stessa conica.

Se due coniche si segano in quattro punti, le otto tangenti in questi punti o passano tutte per due punti (quattro per l'uno e quattro per l'altro) o sono tangenti di una stessa conica [1].

199. Se di un quadrangolo $ABCD$ sono dati i punti diagonali EFG ed un vertice A, il quadrangolo è individuato (determinato ed unico) e può subito essere costruito. Infatti, D è quel punto di AE che è separato armonicamente da A mediante E ed

[1] Staudt, *l. c.*, N° 293.

FG; così *C* è quel punto di *AF* che è separato armonicamente da *A* mediante *F* e *GE*; e *B* è quel punto di *AG* che è separato armonicamente da *A* mediante *G* ed *EF*.

Siccome d'altra parte, avendo una conica ed un triangolo conjugato *EFG*, si può prendere ad arbitrio (nella curva) un punto *A* come vertice di un quadrangolo inscritto *ABCD*, i cui punti diagonali siano *E*, *F*, *G* (gli altri vertici *B*, *C*, *D* sono le seconde intersezioni della conica colle rette *AE*, *AF*, *AG*), così ne risulta che:

Tutte le coniche passanti per un punto dato *A*, per le quali un dato triangolo *EFG* sia conjugato, passano per tre altri punti determinati *B*, *C*, *D*.

200. Il problema « costruire la conica che passa per due punti dati *A*, *A'* e per la quale un dato triangolo *EFG* sia conjugato » si risolverà pertanto nel modo che segue:

Si costruiranno nel modo sopraddetto i tre punti *B*, *C*, *D* che con *A* formano un quadrangolo completo avente i punti diagonali *E*, *F*, *G*. Allora si conosceranno cinque punti della curva *AA'BCD*, epperò si potrà trovarne altri col teorema di Pascal. Del resto, si potrebbero costruire i tre punti *B'C'D'* che con *A'* formano un quadrangolo coi punti diagonali *E*, *F*, *G*; e gli otto punti *ABCDA'B'C'D'* apparterranno tutti alla conica cercata.

201. Supponiamo che si tratti di descrivere una conica che tocchi quattro rette date *abcd* e passi per un punto dato *S* (fig. 157*). Le diagonali del quadrilatero *abcd* formano un triangolo *EFG* conjugato alla conica; epperò, se si costruiscono i tre punti *PQR* che insieme con *S* formano un quadrangolo, i cui punti diagonali siano *EFG*, i tre punti così costruiti apparterranno alla conica domandata. Ma, o non esiste alcuna conica che soddisfaccia alla quistione, o ve ne sono due (N° 170, a destra); dunque, in questo secondo caso, siccome la costruzione dei punti *PQR* è lineare, così entrambe le coniche passeranno per questi punti. Ossia:

Se due coniche inscritte in uno stesso quadrilatero *abcd* hanno un punto comune *S*, esse si segano in altri tre punti *PQR*; e il triangolo formato dalle diagonali del quadrilatero circoscritto *abcd* coincide con quello formato dai punti diagonali del quadrangolo inscritto *PQRS*.

Per la costruzione dei punti *PQR*, per es. del punto *P* che è nella retta *ES* (fig. 157*), osservo che i punti *PS* devono essere separati armonicamente per mezzo di *E* ed *FG*; ma anche la diagonale $(ab)(cd)$, che passa per *E*, è divisa armonicamente in *E*, *F*; abbiamo dunque due forme armoniche, che sono prospettive a cagione del punto unito *E*; perciò le rette $P(ab)$, $S(cd)$, *FG* congiungenti le altre coppie di punti corrispondenti concorreranno in uno

stesso punto (Ni 43, 62). Dunque si congiungerà S ad un termine di una delle diagonali passanti per E, per es. al punto cd; la congiungente incontrerà FG in un punto che si unirà all'altro estremo della stessa diagonale, cioè al punto ab, mediante una retta che segherà ES nel punto cercato P (¹).

202. Le proposizioni correlative, sulle quali il giovane studente farà bene ad esercitarsi, sono:

Tutte le coniche tangenti ad una retta data, per le quali un dato triangolo sia conjugato, toccano tre altre rette determinate.

Costruire la conica che tocca due rette date e per la quale un dato triangolo è conjugato.

Se due coniche circoscritte ad uno stesso quadrangolo hanno una tangente comune, esse hanno tre altre tangenti comuni.

Costruire le tre tangenti comuni alle due coniche che passano per quattro punti dati e toccano una retta data (N° 170, a sinistra).

203. Abbiasi un quadrangolo completo $ABCD$, i cui punti diagonali siano EFG (fig. 159ª). Siano poi

L, P	i punti in cui	FG	incontra	AD, BC,
M, Q	»	GE	»	BD, CA,
N, R	»	EF	»	CD, AB.

I sei punti così ottenuti sono i vertici di un quadrilatero completo; infatti il triangolo EFG è omologico a ciascuno de' seguenti: ABC, DCB, CDA, BAD, i centri d'omologia essendo ordinatamente D, A, B, C. Ne segue che le terne di punti PQR, PMN, LQN, LMR sono in altrettante rette (assi d'omologia).

Queste quattro rette formano un quadrilatero, le cui diagonali LP, MQ, NR formano il triangolo EFG. Ne segue che la conica inscritta nel quadrangolo $ABCD$ e passante per L, passa anche per N, P, R (N° 201); e così pure vi è una conica inscritta nel quadrangolo $ABDC$, la quale passa per R, M, N, Q; ed un'altra inscritta nel quadrangolo $ACBD$ e passante per Q, P, M, L.

Per ciascuna di queste coniche le quattro tangenti date dalla figura (quattro lati del quadrangolo completo $ABCD$) sono armoniche, epperò sono armonici anche i quattro punti di contatto (Ni 111, 161). Infatti, se consideriamo un lato qualunque del quadrangolo suddetto, per es. AB, questo è diviso armonicamente ne' punti R, G (come si deduce dalla considerazione del quadrangolo completo $CDEF$); i punti A, B, G sono le intersezioni della tan-

(¹) Brianchon, *l. c.*, p. 45. (¹) Maclaurin, *De lin. geom.*, § 43.

gente AB colle altre tre, mentre R è il punto di contatto della prima tangente; dunque le quattro tangenti saranno incontrate da qualunque altra tangente della conica che si considera in quattro punti armonici [1].

Se $ABCD$ è un parallelogrammo, i punti E, G, M, Q vanno all'infinito; ed anche $LNPR$ risulta un parallelogrammo. Delle tre coniche sunnominate, la 1ª sarà in questo caso un'ellisse tangente ai lati del parallelogrammo $ABCD$ ne' loro punti di mezzo; la 2ª un'iperbole tangente ai lati AB, CD ne' loro punti di mezzo ed avente gli assintoti AC, BD; la 3ª un'iperbole cogli stessi assintoti e tangente ai lati AD, BC ne' loro punti di mezzo.

204. Dal corollario del teorema di Brianchon, relativo ad un quadrilatero circoscritto (N° 135) già si dedusse (N° 136) la regola per costruire le tangenti di una conica, della quale siano date tre tangenti a, b, c e due punti di contatto B e C (fig. 102ª). Un punto qualunque E di BC si congiunga ai punti ab, ac; le congiungenti g, f incontrano risp. c, b in due punti che uniti dànno una tangente d della conica.

Le quattro tangenti $abcd$ formano un quadrilatero completo, due diagonali del quale $g \equiv (ab)(cd)$, $f \equiv (ac)(bd)$ concorrono in E; dunque (N° 135) in E si segherà colla BC anche la corda di contatto AD delle tangenti a, d. Le rette condotte da E ai punti ab, ac, essendo due diagonali del predetto quadrilatero, sono rette reciproche; dunque (fig. 160ª):

Se un triangolo abc è circoscritto ad una conica, le rette che da un punto qualunque E della polare di un vertice bc vanno agli altri due vertici (ab), (ac) sono rette reciproche.

O viceversa: *Se due rette date toccano una conica, due rette reciproche uscenti da un punto qualunque della corda di contatto segano le due tangenti date in punti che appartengono ad una terza tangente.*

205. Esponiamo ora la proprietà correlativa. Di una conica siano dati tre punti A, B, C e le tangenti b, c in due di essi (fig. 102ª). Una retta e condotta ad arbitrio pel punto bc incontri AB, AC in due punti G, F, uniti i quali risp. a C, B, le congiungenti si segano in un punto D della conica.

I quattro punti $ABCD$ formano un quadrangolo completo, due punti diagonali G, F del quale sono in e; dunque (N° 129) in e

[1] Steiner, *l. c.*, p. 160. — Staudt, *Beiträge zur Geometrie der Lage* (Nürnberg 1856–57–60), N° 329.

cadrà insieme col punto bc anche il punto comune alle tangenti in A, D. I punti G, F, essendo due punti diagonali del quadrangolo anzi detto, sono reciproci; dunque (fig. 160ª):

Se un triangolo ABC è inscritto in una conica, i punti F, G, in cui due lati AB, AC sono incontrati da una retta condotta ad arbitrio pel polo S del terzo lato, sono reciproci.

O viceversa: Se due punti dati in una conica si congiungono a due punti reciproci, i quali siano in linea retta col polo della corda che congiunge i punti dati, le congiungenti s'incontrano in un punto della curva.

§ 21. Centro e diametri.

206. Se si assume come polo un punto a distanza infinita (fig. 161ª) e si conduca pel polo una trasversale a segare la conica in due punti A, A', questi saranno separati armonicamente mediante il polo ed un punto della polare (N° 186); il punto della polare sarà adunque il mezzo del segmento AA'; vale a dire:

Se in una conica si conducano quante corde si vogliono, fra loro parallele, il luogo de' loro punti di mezzo è una retta, che è la polare del punto all'infinito comune alle corde (1).

A questa retta si dà il nome di diametro relativo alle corde che divide per metà. Se il diametro incontra la conica in due punti, questi saranno i punti di contatto delle tangenti dirette al polo, cioè delle tangenti parallele alle corde bisecate. Se negli estremi A, A' di una di queste corde si tirano le tangenti, queste concorreranno in un punto del diametro. Se AA', BB' sono due delle corde bisecate, le rette AB, $A'B'$, ed anche le AB', $A'B$ si segheranno sul diametro (N° 186).

Viceversa, se da un punto del diametro si possono condurre due tangenti a, a' alla conica, la corda AA' di contatto sarà bisecata dal diametro; e se dal punto stesso si conduce la retta che insieme col diametro separa armonicamente le due tangenti, codesta retta sarà parallela alle corde bisecate. Se da due punti del diametro si conducono due coppie di tangenti a ed a', b e b', la retta che con-

(1) Apollonio, *Conic.*, I, 46, 47, 48; II, 5, 6, 7, 28, 29, 30, 31, 34-37.

giunge i punti ab, $a'b'$ e la retta che congiunge i punti ab', $a'b$ saranno pur esse parallele alle corde bisecate (N° 187).

207. Ad ogni punto all'infinito, cioè ad ogni fascio di corde parallele corrisponde un diametro. Tutt'i diametri passano per uno stesso punto, perchè essi sono le polari dei punti di una stessa retta, cioè della retta all'infinito: il punto di concorso de' diametri è il polo della retta all'infinito (N° 190).

208. Siccome la parabola è toccata dalla retta all'infinito, epperò il punto di contatto è il polo di questa retta (N° 188), così tutt'i diametri della parabola sono fra loro paralleli (diretti al punto all'infinito); e viceversa ogni retta, la quale seghi la parabola all'infinito, è un diametro.

209. Se S è un punto qualunque dal quale si possano condurre due tangenti a, a' alla conica (fig. 161ª), la corda di contatto AA', ossia la polare di S, sarà bisecata in R dal diametro passante per S; giacchè S ed il punto all'infinito di AA' sono punti reciproci. Se il diametro sega la curva in M, M', le tangenti in questi punti sono parallele ad AA', ed i punti stessi sono separati armonicamente mediante il polo S e la polare AA' (N° 186).

Dunque, se la conica è una parabola (fig. 162ª), nel qual caso il punto M' va all'infinito, il punto M sarà il punto di mezzo del segmento SR, vale a dire:

La retta che dal punto di mezzo di una corda della parabola va al polo di questa corda è divisa per metà dalla curva [1].

210. Qualora la conica non sia una parabola, la retta all'infinito non è più una tangente della curva, epperò il polo di quella retta, ossia il punto di concorso de' diametri, è un punto a distanza finita. Siccome due punti della conica allineati col polo sono sempre separati armonicamente per mezzo del polo e della polare (N° 186), così se la polare è all'infinito, il polo è il punto di mezzo fra i due punti della curva. Dunque ogni corda della conica passante pel polo della retta all'infinito è divisa per metà in questo punto.

A cagione di questa proprietà, al polo della retta all'infinito, ossia al punto di concorso dei diametri, si dà il nome di centro della conica.

[1] Apollonio, *l. c.*, I, 35.

Applicando al centro ed alla retta all'infinito le proprietà generali del polo e della polare (N° 186, 187), avremo (fig. 163ª):

Se A, A' sono due punti della conica allineati col centro, le tangenti in A, A' sono parallele;

Se AA', BB' sono due coppie di punti della conica allineati col centro, le rette $AB, A'B'$ sono parallele, e sono pur parallele le $AB', A'B$, cioè $ABA'B'$ è un parallelogrammo.

Se a, a' sono due tangenti parallele, la loro corda di contatto e la retta che divide per metà la striscia aa' passano pel centro;

Se aa', bb' sono due coppie di tangenti parallele, la retta che congiunge i punti $ab, a'b'$ e la retta che congiunge i punti $ab', a'b$ passano pel centro; vale a dire, se $aba'b'$ è un parallelogrammo circoscritto, le diagonali si segano nel centro.

211. Se la conica è un'iperbole, la retta all'infinito sega la curva; epperò (N° 188) il centro è un punto esterno, nel quale concorrono le tangenti ne' punti all'infinito, ossia gli assintoti (fig. 170ª).

Se la conica è un'ellisse, la retta all'infinito non incontra la curva, epperò il centro è un punto interno (fig. 163ª, 164ª).

212. Due diametri della conica (ellisse od iperbole [1]) diconsi conjugati se sono rette reciproche, cioè se l'uno passa pel polo dell'altro, epperò l'altro passi pel polo del primo (N° 189). Siccome il polo di un diametro è il punto all'infinito delle corde da questo bisecate, così ne segue che, dato un diametro b (fig. 164ª), il suo diametro conjugato b' è parallelo alle corde bisecate da b, e viceversa b' divide per metà le corde parallele a b [2].

Due diametri conjugati e la retta all'infinito sono i lati di un triangolo conjugato (N° 192), de' cui vertici uno è il centro, gli altri sono all'infinito.

Siccome in un triangolo conjugato, due lati segano la curva e il terzo non la sega (N° 195), e siccome la retta all'infinito è segante per l'iperbole, ma non già per l'ellisse, così di due diametri conjugati dell'iperbole ve n'ha sempre uno (e uno solo) che sega la curva; mentre l'ellisse è segata da tutt'i suoi diametri.

213. Dati cinque punti $ABCDE$ di una conica, trovarne il centro.

Non si ha che a ripetere la costruzione data al N° 191, b) a destra, nella

[1] Nella parabola non ci sono coppie di diametri conjugati, perchè avendosi un punto all'infinito invece del centro, il diametro parallelo alle corde bisecate da un diametro dato coincide sempre colla retta all'infinito. [2] Apollonio, *l. c.*, II, 20.

quale si supponga la retta s all'infinito. Vale a dire: si trovi il punto C' ove la conica è incontrata di nuovo dalla parallela ad AB condotta per C, ed il punto B' ove la conica è incontrata di nuovo dalla parallela ad AC condotta per B; la retta u che unisce i punti di concorso de' lati opposti del quadrangolo $ACBC'$ e la retta v che unisce i punti di concorso de' lati opposti del quadrangolo $ABCB'$ si segheranno nel punto cercato O: il polo della retta all'infinito, ossia il centro della conica.

Le rette u, v sono i diametri risp. conjugati ad AB, AC; conducendo per O la u' parallela ad AB, e la v' parallela ad AC, saranno uu' e vv' due coppie di diametri conjugati.

Se la conica è data per mezzo di cinque tangenti, si vedrà più innanzi (N° 229) come se ne trovi il centro.

214. Quattro tangenti di una conica formano un quadrilatero completo, le cui diagonali sono i lati di un triangolo conjugato (N° 194). Supponiamo che le quattro tangenti siano a due à due parallele (fig. 163ª); una diagonale sarà all'infinito; perciò le altre due sono diametri conjugati (N° 212); dunque:

In ogni parallelogrammo circoscritto ad una conica, le diagonali sono due diametri conjugati.

I punti di contatto delle quattro tangenti formano un quadrangolo completo, i cui punti diagonali sono i vertici dello stesso triangolo conjugato dianzi accennato (N° 132, 194). Per questo quadrangolo un punto diagonale è il centro, e gli altri due sono all'infinito; cioè i sei lati del quadrangolo sono i lati e le diagonali di un parallelogrammo inscritto; i lati sono a due a due paralleli alle diagonali del parallelogrammo circoscritto; e le diagonali si segano nel centro.

215. Viceversa, se imaginiamo (fig. 163ª) un parallelogrammo inscritto qualunque $ABA'B'$, e lo consideriamo come un quadrangolo completo, siccome i suoi tre punti diagonali devono essere i vertici di un triangolo conjugato, così l'un d'essi sarà il centro della conica e gli altri due saranno i punti all'infinito di due diametri conjugati; dunque:

In ogni parallelogrammo inscritto in una conica, i lati sono paralleli a due diametri conjugati e le diagonali si segano nel centro. Ossia:

Due corde congiungenti un punto variabile A della conica ai termini di un diametro dato BB' sono sempre parallele a due diametri conjugati.

216. Dal teorema del N° 214 si deduce tosto:

Due tangenti parallele (a, a') sono incontrate da due diametri conjugati in quattro punti che uniti dànno due altre tangenti parallele (b, b').

Se dai termini (A, A') di un diametro si conducono rette parallele a due diametri conjugati, queste concorrono in due punti della curva, che uniti dànno un altro diametro.

Date due tangenti parallele a, a', i cui punti di contatto siano A, A', ed una terza tangente b, se da A si conduce la parallela al diametro che passa pel punto $a'b$, e da A' la parallela al diametro che passa pel punto ab, quelle due rette concorreranno nel punto B, ove b tocca la conica.

Date due tangenti parallele a, a', i loro punti di contatto A, A' ed un altro punto B della conica, la tangente in B segherà a in un punto situato nel diametro parallelo ad $A'B$, ed a' in un punto situato nel diametro parallelo ad AB.

217. Suppongasi ora che la conica sia un cerchio (fig. 165*), cioè sia il luogo del vertice di un angolo retto AMB i cui lati AM, BM ruotino intorno a due punti fissi A, B. Questi lati mobili generano due fasci uguali, epperò projettivi; dunque la tangente in A sarà quel raggio del primo fascio che corrisponde al raggio BA del secondo (N° 107). La tangente in A deve dunque fare con BA un angolo retto; e similmente la tangente in B sarà perpendicolare ad AB. Dall'essere le tangenti in A e B rette parallele, segue che AB è un diametro e che il punto O, mezzo di AB, è il centro della conica (N° 210).

Poichè AB è un diametro, le rette AM, BM avranno, per ogni posizione di M, la direzione di due diametri conjugati (N° 215); dunque due diametri conjugati del cerchio sono sempre fra loro perpendicolari.

Le diagonali d'ogni parallelogrammo circoscritto al cerchio, dovendo essere due diametri conjugati, si segheranno ad angolo retto; dunque ogni parallelogrammo circoscritto al cerchio è un rombo. In un rombo la distanza di due lati opposti è uguale alla distanza degli altri due lati; perciò se nel comporre il rombo circoscritto, teniamo fissi due lati opposti, e facciamo variare gli altri due, potremo concludere che la distanza di due tangenti parallele è costante. La distanza di due tangenti parallele è la retta che ne

unisce i punti di contatto, giacchè questa retta, che è un diametro, sega ad angolo retto il diametro conjugato e le tangenti parallele a questo; dunque: tutt'i diametri sono uguali.

Le diagonali d'ogni parallelogrammo inscritto sono diametri; ma i diametri sono tutti uguali; dunque tutt'i parallelogrammi inscritti sono rettangoli.

218. Qualunque sia la conica (fig. 161ª), se s è una retta arbitraria il cui polo sia S, le corde parallele ad s saranno bisecate dal diametro passante per S; giacchè essendo S ed il punto all'infinito di s punti reciproci, la polare del secondo punto deve passare pel primo. Possiamo anche dire:

Il diametro conjugato a quello che passa per un dato punto è parallelo alla polare di questo punto.

a) Se il diametro per S sega la conica in due punti M, M', questi saranno separati armonicamente mediante il polo S e la polare s [1]; dunque, detto O il punto di mezzo di MM', ossia il centro della conica, ed R il punto in cui cotesto diametro sega la polare s, avremo (N° 55, *b*):

$$OS \, . \, OR = \overline{OM}^2$$

b) Di qui segue una costruzione del semidiametro conjugato alla corda AA' di una conica, della quale siano dati altri tre punti. Si trovi il centro O (N° 213) e si congiunga al punto di mezzo R di AA'; si costruisca la tangente in A, la quale incontri OR in S e si prenda OM media proporzionale fra OR, OS; sarà OM il semidiametro cercato.

Se O si trova fra R ed S, sicchè OR, OS siano di segni opposti, il diametro OR non incontra la curva. Ma anche in tal caso, la lunghezza OM, media proporzionale fra OR, OS, si denomina grandezza del semidiametro conjugato alla corda AA'.

Un'analoga definizione si può dare per una retta qualsivoglia (N° 223).

c) Se la conica è un cerchio, a cagione dell'ortogonalità de' diametri conjugati (N° 217), avremo:

La polare di un punto qualunque rispetto al cerchio è perpendicolare al diametro che passa pel polo.

(1) Apollonio, *l. c.*, I, 34, 36, II. 29, 30.

219. Da quest'ultima proprietà si può cavare un importantissimo teorema. Si considerino i punti $A, B, C, \ldots$ di una retta punteggiata s come poli (fig. 166ª); i diametri $O(A, B, C, \ldots)$ che li projettano dal centro O della conica formeranno un fascio prospettivo alla punteggiata. Un altro fascio è costituito dalle rette $a, b, c, \ldots$ polari di $A, B, C, \ldots$, giacchè queste (N° 190) passano tutte per uno stesso punto S, che è il polo di s; e siccome, per l'anzidetta proprietà (supposta la conica essere un cerchio), le rette $O(A, B, C, \ldots)$ sono ordinatamente perpendicolari alle $a, b, c, \ldots$, così i due fasci sono uguali. Ne segue che la punteggiata dei poli $ABC\ldots$ è projettiva al fascio delle polari $abc\ldots$.

Questa conclusione non è vera soltanto pel cerchio, ma eziandio per tutte le coniche. Infatti, una conica data qualsivoglia può sempre essere considerata come projezione di un cerchio (N[i] 113, 114); nella projezione le forme armoniche corrispondono a forme armoniche (N° 43), epperò ad un punto ed alla sua polare rispetto alla conica corrisponderanno un punto e la sua polare rispetto al cerchio, e viceversa. Ad una punteggiata di poli ed al fascio delle polari rispetto alla conica corrisponderanno una punteggiata di poli ed il fascio delle polari rispetto al cerchio; ma questa punteggiata e questo fascio sono projettivi; dunque:

La punteggiata costituita da un numero qualunque di poli in linea retta ed il fascio delle rette polari, rispetto ad una conica data, sono due forme projettive [1].

220. Siano $A, B, C\ldots$ punti di una retta s (fig. 167ª); $a, b, c\ldots$ le loro polari, le quali sono rette incrociate in un punto fisso S, polo di s; e siano $A', B', C', \ldots$ i punti in cui s è incontrata dalle $a, b, c, \ldots$. Siccome A ed A' sono punti reciproci, così la polare di A' passerà per A, e precisamente essa sarà la retta SA, giacchè S è reciproco ad ogni punto di s. Il fascio $abc\ldots$ è (N° 220) projettivo alla punteggiata $ABC\ldots$ e prospettivo alla punteggiata $A'B'C'\ldots$; dunque, queste due punteggiate sono projettive. Ma in queste due punteggiate, due punti come A, A' si corrispondono in doppio modo; infatti, se consideriamo A' come punto della prima punteggiata, la sua polare (che è SA) sega la retta s nel punto A. Dunque (N° 93) le coppie di punti reciproci $AA' . BB' . CC'\ldots$

[1] Möbius, *l. c.*, p. 445.

sono in involuzione (1). Se l'involuzione ha due punti doppi, uno de' quali sia *M*, sarà *M* un punto reciproco a sè stesso, vale a dire un punto tale che la sua polare passi pel polo stesso; dunque *M* sarà (N° 188) un punto della curva, ed *SM* sarà la tangente in esso punto.

Anche le coppie di rette *aa'* . *bb'* . *cc'* ..., polari dei punti *AA'* . *BB'* . *CC'* ... costituiscono un'involuzione, sia in virtù del teorema del N° 219, sia perchè quelle rette nascono dal projettare questi punti da *S*; dunque (2):

Una retta data ad arbitrio (che non sia tangente alla conica) contiene infinite coppie di punti reciproci, le quali costituiscono un'involuzione. Se la retta sega la conica, le due intersezioni sono i punti doppi dell'involuzione. Il punto centrale dell'involuzione è situato nel diametro che passa pel polo della retta data (N° 218).

Per un punto arbitrario (che non sia situato nella conica) passano infinite coppie di rette reciproche, le quali costituiscono un'involuzione.

Se il punto è esterno alla curva, le tangenti che passano per esso sono i raggi doppi dell'involuzione; cioè (N° 96, *a*): Due tangenti e due rette reciproche uscenti da uno stesso punto formano un fascio armonico.

Se il punto dato è all'infinito, si ha un'involuzione di rette parallele, reciproche a due a due, il raggio centrale della quale è un diametro della curva (N° 99).

221. Sia *ABCD* un quadrangolo semplice, inscritto nella conica (fig. 168a); *F* l'intersezione delle sue diagonali *AC*, *BD*; ed *E*, *G* i punti di concorso delle coppie di lati opposti: così che i tre punti *E*, *F*, *G* saranno a due a due reciproci (N° 193). Da un punto qualunque *I* della *EG* conducansi le tangenti *IP*, *IQ* alla conica, e inoltre si projettino i vertici del quadrangolo. Le due tangenti sono separate armonicamente mediante le *IE*, *IF*, perchè queste rette, essendo *F* il polo di *IE*, sono reciproche (N° 220). Le *IE*, *IF* formano un gruppo armonico anche colle *IA*, *IC*, giacchè la diagonale *AC* del quadrilatero completo formato dalle rette *AB*, *BC*, *CD*, *DA* è divisa armonicamente dalle altre due diagonali *BD*, *EG*, e i quattro raggi accennati sono appunto

(1) Si suppone che *s* non sia una tangente della conica. Se fosse una tangente, presi ad arbitrio in essa i punti *ABC*..., i punti *A'B'C'*... coinciderebbero tutti nel punto di contatto *S*.

(2) Desargues, *l. c.*, p. 192-3.

quelli che da F projettano i quattro punti armonici di AC. Per la medesima ragione le IE, IF separano armonicamente le IB, ID. Le due tangenti, le IA, IC e le IB, ID sono pertanto tre coppie di rette conjugate in una stessa involuzione, i cui raggi doppi sono IE, IF (N° 96, *a*). Ossia:

Se un quadrangolo è inscritto in una conica, e se da un punto della retta che unisce i punti di concorso delle coppie di lati opposti si tirano le tangenti alla curva e si projettano le due coppie di vertici opposti, si hanno tre coppie di rette conjugate in involuzione.

a) In virtù del teorema correlativo a quello di DESARGUES (N° 143, a destra) si può inscrivere nel quadrilatero $ABCD$ una conica che tocchi le due rette IP, IQ.

b) Il teorema correlativo a quello ora dimostrato si enuncia così:

Se un quadrilatero (semplice) $ABCD$ è circoscritto ad una conica (fig. 169ª), e se pel punto F comune alle diagonali si conduce ad arbitrio una trasversale, questa incontra la curva e le due coppie di lati opposti AB e CD, BC e AD in tre coppie di punti conjugati in involuzione.

c) In virtù del teorema di DESARGUES (N° 143, a sinistra), pei due punti comuni alla conica data ed alla trasversale, e pei quattro vertici del quadrilatero si può far passare una conica [1].

222. La teoria de' punti reciproci dà una soluzione del problema: trovare le intersezioni della conica individuata da cinque punti o da cinque tangenti con una retta data s.

Presi in s due punti U, V, se ne costruiscano le polari u, v (N° 191), le quali incontrino s in U', V'. Se l'involuzione determinata dalle coppie di punti reciproci UU', VV' ha due punti doppi M, N, queste saranno (N° 220) le cercate intersezioni della conica con s [2].

Correlativamente si risolve il problema: da un punto dato S condurre le tangenti alla conica individuata da cinque tangenti o da cinque punti.

223. Siano AA' due punti reciproci, situati nella retta data s; ed O il punto in cui s sega il diametro passante pel polo S (il diametro che taglia per metà le corde parallele ad s); sarà O il punto centrale dell'involuzione formata in s dalle coppie di punti reciproci, epperò $OA \,.\, OA' = \text{cost.}$ (N° 96). Se s taglia la conica in due punti M, N, questi sono gli elementi doppi dell'involuzione, onde $OA \,.\, OA' = \overline{OM}^2 = \overline{ON}^2$. Se la retta s non incontra la curva, il valore costante di $OA \,.\, OA'$ sarà negativo (N° 96, *b*); e in questo caso vi sono due punti conjugati dell'involuzione, H, H', ossia due punti reciproci rispetto alla conica, pei quali O è il punto di mezzo; così che $OA \,.\, OA' = OH \,.\, OH' = -\overline{OH}^2 = -\overline{OH'}^2$. Il segmento HH' dicesi allora corda ideale della conica [3]; mentre nel primo caso MN era una corda reale. Dietro questa definizione, si può dire che un diametro con-

[1] CHASLES, *Sections coniques*, Nⁱ 122 e 126.
[2] STAUDT, *Geometrie der Lage*, N° 305.
[3] PONCELET, *l. c.*, p. 29.

tiene i punti di mezzo di tutte le corde reali ed ideali, parallele al diametro conjugato.

Se due coniche hanno comune una corda reale MN, ciò significa che l'una e l'altra passano pei punti M, N. Invece, se si dicesse che le due coniche hanno comune una corda ideale HH', ciò varrebbe a dire che H ed H' sono punti reciproci rispetto ad entrambe le coniche, e che pel punto di mezzo della HH' passano i diametri delle due coniche che contengono i poli della HH' medesima.

224. Un fascio di raggi in involuzione possiede in generale (N° 163) una coppia di rette conjugate ortogonali; dunque:

Per un punto dato ad arbitrio si può sempre condurre una coppia di rette reciproche ortogonali, che sono le bissettrici degli angoli delle tangenti che escono dal punto dato, se questo è esterno alla conica.

225. Invece del punto arbitrario S, prendiamo ora il centro O della conica (iperbole od ellisse); due rette reciproche saranno due diametri conjugati; dunque (N° 220):

Le coppie di diametri conjugati formano un'involuzione. Se la conica è un'iperbole, l'involuzione ha per raggi doppi gli assintoti; vale a dire, due diametri conjugati dell'iperbole sono sempre separati armonicamente mediante gli assintoti [1]. Se la conica è un'ellisse, l'involuzione non ha raggi doppi.

Considerando in un'involuzione due coppie di elementi conjugati, secondochè l'una coppia sia separata o no mediante l'altra coppia, l'involuzione manca o è dotata di elementi doppi (N° 98, *a*); dunque:

Di due coppie di diametri conjugati dell'ellisse, l'una aa' è sempre separata mediante l'altra bb' (fig. 164ª);

Di due coppie di diametri conjugati dell'iperbole, l'una aa' non è mai separata mediante l'altra bb' (fig. 170ª).

226. L'involuzione de' diametri conjugati avrà (N° 224) una coppia di diametri conjugati rettangolari. Se ve ne fosse una seconda coppia, qualunque diametro sarebbe perpendicolare al suo conjugato (N° 163), e in tal caso facendo muovere sulla curva il vertice di un angolo i cui lati passino per gli estremi fissi di un diametro, quell'angolo sarebbe costantemente retto (N° 215), epperò la conica sarebbe un cerchio.

[1] Delahire, *l. c.*, II, 13, cor. 4.

a) Dunque ogni conica, che non sia una parabola, nè un cerchio, ha una ed una sola coppia di diametri conjugati rettangolari. A questi due diametri aa' (fig. 164ª e 170ª) si dà il nome di **assi**. Nell'iperbole gli assi aa' sono (N° 225; 52) le bissettrici degli angoli degli assintoti m, n (fig. 170ª).

b) Considerando un **asse** come un diametro che divida per metà le corde ad esso perpendicolari, anche la parabola possiede un asse. Infatti, le corde perpendicolari alla direzione comune di tutt'i diametri, essendo fra loro parallele, hanno i loro punti di mezzo in una retta (N° 206), che è l'**asse** a della parabola (fig. 162ª).

227. Siano dati cinque punti di una conica; si potrà, com'è detto nel N° 213, costruirne il centro O e due paja di diametri conjugati uu', vv'. Se l'una di queste coppie è separata mediante l'altra, la conica sarà un'ellisse, nel caso opposto un'iperbole (N° 225). In questo secondo caso, costruendo i raggi doppi dell'involuzione determinata dalle coppie uu', vv', questi saranno gli assintoti della curva. Nell'un caso e nell'altro, costruendo (N° 163) i raggi conjugati ortogonali dell'involuzione medesima, questi saranno gli assi della conica.

Si può anche trovare la direzione degli assi, senza costruire prima il centro e le coppie di diametri conjugati (¹). A tale uopo si descriva il cerchio ABC e si costruisca (N° 175, *a*) il quarto punto C' d'intersezione del medesimo colla conica individuata dai cinque punti dati $ABCFG$ (fig. 145ª). Una trasversale arbitraria segherà le due curve e le coppie di lati opposti del quadrangolo inscritto comune $ABCC'$ in punti accoppiati in involuzione (N° 143). I punti doppi P, Q di quest'involuzione, se esistono, saranno reciproci (Nⁱ 96, *a*, 220) rispetto all'una e all'altra curva, cioè comporranno la coppia comune (N° 164) alle due involuzioni costituite sulla trasversale dai punti reciproci relativi al cerchio e dai punti reciproci relativi alla conica (N° 220). Si imagini assunta per trasversale la retta all'infinito; siccome questa non taglia il cerchio, così almeno una delle predette due involuzioni è priva di punti doppi, e per conseguenza (N° 164) i punti P, Q esistono realmente. Questi punti essendo all'infinito e reciproci rispetto ad entrambe le curve, saranno (Nⁱ 206, 212) i poli di due diametri conjugati del cerchio e anche di due diametri conjugati della conica; ma i diametri conjugati di un cerchio sono ortogonali (N° 217), dunque P, Q sono i poli degli assi della conica. Gli stessi punti P, Q sono anche separati armonicamente mediante ciascuna coppia di lati opposti del quadrangolo $ABCC'$; ne segue che P, Q sono i punti all'infinito delle bissettrici degli angoli di ciascuna coppia di lati opposti (N° 52). Di qui si vede che per ottenere le cercate direzioni degli assi, basta condurre

(¹) Poncelet, *l. c.*, N° 394.

le bissettrici di una coppia di lati opposti del quadrangolo $ABCC'$, per esempio della coppia AB, CC' (fig. 145ª).

228. Abbiasi un quadrilatero completo $qrst$ ed un punto qualsivoglia S (fig. 138ª). S'è già veduto (N° 145, a destra) che nell'involuzione determinata dalle coppie aa', bb' di raggi che da S projettano due coppie di vertici opposti, sono conjugate le tangenti condotte da S a qualsivoglia conica inscritta nel quadrilatero. Supponiamo che l'involuzione abbia due raggi doppi m, n; questi separeranno armonicamente quella coppia di tangenti (N° 96, a), epperò saranno essi (N° 220) rette reciproche rispetto alla conica. Dunque (N° 170, a destra):

Se per un punto dato passano due coniche inscritte in un dato quadrilatero, le loro tangenti in quel punto sono rette reciproche rispetto a tutte le coniche inscritte nel quadrilatero medesimo.

Invece di assumere ad arbitrio il punto S, possiamo supporre data la retta m; se questa retta non passa per alcuno de' vertici del quadrilatero, esisterà una (ed una sola) conica tangente alle cinque rette $mqrst$ (N° 116, b). Sia S il punto in cui questa conica tocca m; per S passerà un'altra conica inscritta nel quadrilatero, la cui tangente in S s'indichi con n. Le rette m, n saranno adunque reciproche rispetto a tutte le coniche inscritte nel quadrilatero, vale a dire (N° 189):

I poli di una retta arbitraria m rispetto a tutte le coniche inscritte in uno stesso quadrilatero sono situati in un'altra retta n.

a) Siccome le m, n sono i raggi doppi dell'involuzione nella quale sono conjugati i raggi aa' condotti da S a due vertici opposti, così:

Le rette m, n dividono armonicamente ciascuna diagonale del quadrilatero.

b) Le proposizioni correlative sono:

Se una retta data tocca due coniche circoscritte ad un dato quadrangolo, i due punti di contatto sono reciproci rispetto a tutte le coniche circoscritte al quadrangolo medesimo.

Le rette polari di un dato punto M, rispetto a tutte le coniche circoscritte ad uno stesso quadrangolo, concorrono in un punto fisso N.

I due punti M, N separano armonicamente ciascuna coppia di lati opposti del quadrangolo completo.

c) Nel primo teorema si supponga essere *m* la retta all'infinito, i poli di *m* saranno i centri delle coniche (N° 210); dunque:

I centri di tutte le coniche inscritte in uno stesso quadrilatero sono in una retta (fig. 171ª), che divide per metà le diagonali del quadrilatero (¹).

d) Anche nel secondo teorema (*b*) supponiamo essere il punto *M* all'infinito; le polari di *M* saranno (N° 206) i diametri conjugati a quelli il cui punto all'infinito è *M*; dunque:

I diametri di tutte le coniche circoscritte ad un quadrangolo fisso, conjugati ad un diametro di direzione data, concorrono in un punto fisso.

229. Il teorema di Newton (N° 228, *c*) dà un mezzo semplice per trovare il centro di una conica data per mezzo di cinque tangenti *abcde* (fig. 172ª).

Le quattro tangenti *abcd* formano un quadrilatero, del quale si divideranno le diagonali per metà. Operando similmente sul quadrilatero *abce*, le due bisecanti concorreranno in un punto *O*, che sarà il centro cercato.

Le cinque tangenti, prese a quattro a quattro, dànno cinque quadrilateri; le cinque bisecanti delle diagonali passeranno adunque tutte pel centro *O* della conica inscritta nel pentagono *abcde*.

Lo stesso teorema serve a determinare la direzione dei diametri della parabola data per mezzo di quattro tangenti *abcd*. Infatti, il punto all'infinito della retta che contiene i punti di mezzo delle diagonali del quadrilatero *abcd* sarà il polo della retta all'infinito rispetto ad una conica inscritta nel quadrilatero medesimo (N° 228), cioè sarà il punto all'infinito della parabola inscritta. Dunque la detta bisecante è essa medesima un diametro della parabola (fig. 171ª).

§ 22. Figure polari reciproche.

230. S'è già veduto (N° 190) che, data una conica fondamentale **K**, se un polo variabile descrive una retta, la polare ruota intorno ad un punto determinato; e viceversa, se una retta, considerata come polare, si muove passando per un punto fisso, il polo percorre una retta determinata.

Considero ora come polari tutte le tangenti di una data curva **C**; ossia imagino che la retta polare si muova inviluppando la curva data. Il polo si muoverà descrivendo un'altra linea, che s'indicherà con **C'**. I punti di **C'** sono adunque i poli delle tangenti di **C**.

(¹) Newton, *l. c.*, lib. I, lemma 25, cor. 3.

Viceversa, dico che i punti di C sono i poli delle tangenti di C'. Infatti, siano M', N' due punti di C' (fig. 173ª); le loro polari m, n saranno due tangenti di C; ed il punto mn sarà il polo della corda $M'N'$ (N° 190). Suppongo che il punto N' si vada sempre più avvicinando ad M'; la corda $M'N'$ si avvicinerà alla posizione della tangente di C' in M'; la retta n si accosterà sempre più alla posizione di m, ed il punto mn tenderà verso il punto ove m tocca C. Quando la distanza $M'N'$ sia divenuta evanescente, si avrà che la tangente di C' in M' è la polare del punto di contatto fra m e C. Dunque, come le tangenti di C sono le polari dei punti di C', così le tangenti di C' sono le polari dei punti di C; se una retta m tocca C in M, il polo M' di m è un punto di C' e la polare m' di M è tangente a C' in M'.

Le due curve C, C', ciascuna delle quali è simultaneamente il luogo dei poli delle tangenti dell'altra e l'inviluppo delle polari dei punti dell'altra, diconsi polari reciproche (1).

231. Una retta qualunque r incontri una delle due curve reciproche in μ punti; le polari di questi punti sono altrettante tangenti dell'altra curva, uscenti dal polo R' di r. La seconda curva è dunque toccata da tante rette uscenti da un dato punto R', quante sono le intersezioni della prima colla retta r, polare di R'; e viceversa.

232. Suppongo ora che C sia una conica; a e b siano due sue tangenti, che da tutte le altre tangenti $c, d, e, \ldots$ saranno incontrate in punti corrispondenti di due punteggiate projettive (N° 113, b). Vale a dire, considero C come inviluppo delle rette $c, d, e, \ldots$ che uniscono i punti corrispondenti di due punteggiate projettive a e b (N° 114, b).

La curva C' conterrà i poli $A', B', C', D', E', \ldots$ delle tangenti $a, b, c, d, e, \ldots$ di C. Le rette $A'(C'.D'.E'\ldots)$ saranno le polari dei punti $a(c.d.e\ldots)$ e formeranno un fascio projettivo alla punteggiata a dei poli; e così pure le rette $B'(C'.D'.E'\ldots)$ saranno le polari dei punti $b(c.d.e\ldots)$ e formeranno un fascio projettivo alla punteggiata b dei poli (N° 219). Ma le due punteggiate $a(c.d.e\ldots)$, $b(c.d.e\ldots)$ sono projettive; sono adunque projettivi anche i fasci $A'(C'.D'.E'\ldots)$, $B'(C'.D'.E'\ldots)$. Donde segue che

(1) Poncelet, *l. c.*, N° 232.

C' è il luogo dei punti comuni ai raggi corrispondenti di due fasci projettivi; ossia (N° 114, *a*):

La curva polare reciproca di una conica è un'altra conica (1).

233. Data la conica fondamentale **K**, ed un'altra conica **C**, della quale si voglia determinare la polare reciproca **C'**, si può domandare se **C'** sarà un'ellisse, un'iperbole o una parabola. La retta all'infinito è la polare del centro *O* di **K**; perciò i punti all'infinito di **C'** corrisponderanno alle tangenti di **C** uscenti da *O*. Segue da ciò che la conica **C'** sarà un'ellisse o un'iperbole, secondo che il punto *O* sia interno od esterno alla conica **C**; sarà una parabola, se *O* è un punto di **C**.

Se *A* è il polo di una retta *a* rispetto a **C**, e se *a'*, *A'* sono la polare di *A* ed il polo di *a* rispetto a **K**, sarà *A'* il polo di *a'* rispetto a **C'**, perchè ad un gruppo armonico di quattro poli corrisponde un gruppo armonico di quattro polari (N° 219), e viceversa. Dunque il centro *M'* di **C'** sarà il polo relativo a **K** di quella retta *m* che, rispetto a **C**, è la polare di *O*. Due diametri conjugati di **C'** corrisponderanno a due punti di *m*, reciproci rispetto a **C**, ecc., ecc.

234. Nel piano della conica fondamentale sia data una figura (N° 1) o complesso qualsivoglia di punti, rette e curve; di ogni punto si costruisca la retta polare, di ogni retta il polo, di ogni curva la curva polare reciproca. Si ottiene così una nuova figura; e le due figure diconsi polari reciproche, perchè ciascuna di esse contiene i poli delle rette dell'altra, le polari dei punti dell'altra, le curve polari delle curve dell'altra.

Due figure polari reciproche sono figure correlative, secondo il principio di dualità nella geometria piana (N° 27); giacchè ad ogni punto dell'una corrisponde una retta nell'altra, ad ogni punteggiata della prima un fascio nella seconda. Di più, esse giacciono in uno stesso piano e vi hanno una determinata giacitura scambievole, essendo ogni punto dell'una e la retta corrispondente dell'altra collegate fra loro dalla condizione di dover essere polo e polare rispetto ad una conica fissa. Invece due figure correlative, concepite col solo uso del principio di dualità, non hanno fra loro alcun vincolo di posizione l'una rispetto all'altra (2).

(1) Poncelet, *l. c.*, N° 231. (2) Steiner, *l. c.*, p. VII della prefazione.

235. Di due figure polari reciproche, se l'una contiene una punteggiata (di poli), l'altra contiene un fascio (delle polari); e queste due forme corrispondenti sono projettive (N° 219). Perciò, se i punti della punteggiata sono accoppiati in involuzione, anche i raggi del fascio corrispondente avranno la medesima proprietà; e ai punti doppi della prima involuzione corrisponderanno i raggi doppi della seconda (N° 95). Se nell'una figura vi è una conica, nell'altra vi sarà del pari una conica (N° 232); ai punti della prima conica corrisponderanno le tangenti della seconda, alle tangenti della prima i punti della seconda; ai poligoni inscritti nell'una i poligoni circoscritti nell'altra (N° 230). Se la prima figura esprime la dimostrazione di un teorema o la soluzione di un problema, la seconda esprimerà la dimostrazione del teorema correlativo o la soluzione del problema correlativo: dove lo scambio ha luogo fra gli elementi punto e retta.

236. Teorema. — I vertici di due triangoli conjugati ad una conica sono punti di una seconda conica, e i loro lati sono tangenti di una terza conica [1].

Siano ABC, DEF due triangoli, ciascun de' quali sia conjugato (N° 192) alla conica fondamentale **K** (fig. 174ª); comincerò dal dimostrare che due de' sei lati incontrano gli altri quattro in due gruppi projettivi di quattro punti.

Il lato BC incontri DE, DF in B_1, C_1; ed il lato EF incontri AB, AC in E_1, F_1. I punti B, C sono i poli delle rette CA, AB; il punto B_1, essendo comune alle BC, DE ha per polare la congiungente AF de' loro poli; e così pure C_1, comune alle BC, DF, ha per polare la AE. Il gruppo di quattro poli BCB_1C_1 è dunque projettivo (N° 219) al gruppo delle quattro polari $A(C, B, F, E)$; epperò è anche projettivo al gruppo F_1E_1FE de' punti in cui queste quattro rette sono segate dalla trasversale EF. Si ha cioè $(BCB_1C_1) = (F_1E_1FE)$, ossia (N° 56) $(BCB_1C_1) = (E_1F_1EF)$; uguaglianza che appunto esprime la projettività de' due gruppi di quattro punti in cui le BC, EF sono incontrate dalle AB, CA, DE, FD. Queste sei rette, vale a dire i sei lati de' triangoli proposti, sono adunque (N° 114, *b*) tangenti di una medesima conica **C**.

I poli di queste sei rette sono i sei vertici de' triangoli medesimi; dunque (N° 232) i sei vertici sono punti di una stessa conica **C'**, che è la polare reciproca di **C** rispetto alla conica fondamentale **K**.

a) Il teorema attuale si può esprimere eziandio dicendo che la conica **C**, tangente a cinque de' sei lati di due triangoli conjugati ad una data conica **K**, tocca anche il sesto lato; e la conica determinata da cinque vertici passa anche pel sesto.

[1] Steiner, *l. c.*, p. 308. — Chasles, *l. c.*, N° 215.

Donde s'inferisce che, se una conica **C** tocca i lati di un triangolo *abc* conjugato ad un'altra conica **K**, infiniti altri triangoli conjugati a questa saranno circoscritti alla prima. Infatti, sia *d* una tangente qualsivoglia di **C**; dal punto *D*, polo di *d* rispetto a **K**, s'imagini condotta un'altra tangente *e* a **C**; e sia *f* la polare, rispetto a **K**, del punto *de*, così che sarà *def* un triangolo conjugato a **K** (N° 193). Siccome **C** tocca già cinque lati *abcde* di due triangoli conjugati a **K**, così toccherà anche il sesto lato *f*; c. d. d. Se dal punto *D* si possono condurre anche due tangenti *e'*, *f'* a **K**, le quattro rette *efe'f'* formeranno un gruppo armonico, perchè le *ef* sono reciproche rispetto a **K** (N° 220); dunque le *e'f'* saranno reciproche rispetto a **C**.

Il luogo del punto *D* è la conica **C'**, polare reciproca di **C** rispetto a **K**; dunque:

Se una conica **C** è inscritta in un triangolo conjugato ad un'altra conica **K**, il luogo di un punto dal quale si possa condurre un fascio armonico di quattro tangenti alle due coniche è una terza conica **C'**, polare reciproca di **C** rispetto a **K**.

b) Correlativamente, possiamo anche dire che, se una conica **C'** passa pei vertici di un triangolo conjugato ad un'altra conica **K**, sarà pur circoscritta ad infiniti altri triangoli conjugati alla stessa **K**; e le rette che segano **C'** e **K** in due coppie di punti conjugati armonicamente sono tutte tangenti di una stessa conica **C**, polare reciproca di **C'** rispetto a **K**.

237. Considero una conica **C** e due triangoli circoscritti $OQ'R'$, $O'PS$ (fig. 175ª). Le due tangenti PS, $Q'R'$ sono incontrate dagli altri quattro lati $O'P$, OQ', OR', $O'S$ in due gruppi corrispondenti $PQRS$, $P'Q'R'S'$ di due punteggiate projettive u, u' (N° 113, *b*). Perciò saranno anche projettivi i gruppi di raggi $O(P, Q, R, S)$, $O'(P', Q', R', S')$ che projettano quei punti risp. da O, O'. Dunque i punti P, Q', R', S, dove si segano i raggi corrispondenti, sono situati (N° 114, *a*) in una conica **C'**, che passa pei centri di projezione O, O'; vale a dire:

Se due triangoli sono circoscritti ad una conica, essi sono inscritti in un'altra conica.

Partendo invece dalla considerazione della conica **C'** e de' triangoli inscritti $PQ'R'$, $O'PS$, si dimostra affatto analogamente (correlativamente) il teorema correlativo ed inverso del precedente:

Se due triangoli sono inscritti in una conica, essi sono circoscritti ad un'altra conica [1].

a) Di qui segue immediatamente:

[1] Brianchon, *l. c.*, p. 35. — Steiner, *l. c.*, p. 173.

La conica che contiene cinque vertici di due triangoli circoscritti ad un'altra conica passa anche pel sesto.

La conica che tocca sei lati di due triangoli inscritti in un'altra conica tocca anche il sesto.

Ovvero:

Se due coniche sono tali che si possa inscrivere nell'una un triangolo che riesca circoscritto all'altra, infiniti altri triangoli avranno la stessa proprietà (¹).

b) Nella figura abbiamo quattro forme projettive, cioè le due punteggiate u, u', che determinano le tangenti della conica **C**, e i due fasci O, O', che determinano i punti di **C**'; il fascio O è prospettivo alla punteggiata u, e così il fascio O' è prospettivo ad u'. Dunque, se una tangente qualsivoglia di **C** sega u, u' in A, A', i raggi OA, OA' concorreranno in un punto M di **C**'; e viceversa, se un punto qualunque M di **C**' vien projettato da O, O', i raggi projettanti incontreranno u, u' in due punti A, A' di una stessa tangente di **C**. Dunque:

Se due lati di un triangolo variabile $AA'M$ girano attorno a due punti fissi O, O' di una data conica, mentre i vertici opposti corrono su due rette fisse u', u, ed il terzo vertice percorre la conica anzidetta, il terzo lato toccherà costantemente una conica determinata, tangente alle due rette u, u'.

Se due vertici di un triangolo variabile $AA'M$ corrono su due rette u, u', tangenti ad una conica data, mentre i lati opposti ruotano intorno a due punti fissi O', O, ed il terzo lato tocca la conica anzidetta, il terzo vertice percorrerà una conica determinata, che passa pei punti O, O'.

238. Abbiasi un triangolo TRS, i cui lati RS, ST, TR (fig. 106ª) siano incontrati da una trasversale in A', B', C'; e le polari di questi punti rispetto ad una conica data **K** (non tracciata nella figura), incontri la trasversale medesima ne' punti A, B, C. Le tre coppie di punti reciproci AA', BB', CC' saranno in involuzione (N° 220), epperò (N° 103) le congiungenti TA, RB, SC concorreranno in un punto Q. Suppongasi inoltre il punto T reciproco ad A', ed R reciproco a B'; vale a dire, le polari di A', B' (rispetto alla conica data) siano TA, RB; il punto Q comune a queste polari sarà per conseguenza il polo della trasversale $A'B'$. Essendo C' un punto di questa retta ed inoltre reciproco a C, la sua po-

(¹) Poncelet, *l. c*, N° 565.

lare sarà QC; ma QC passa per S; dunque anche S e C' sono punti reciproci. Considerando ora il quadrilatero completo formato dalla trasversale e dai lati del triangolo TRS, si potrà concludere il teorema:

Se i termini (T, A'), (R, B') di due diagonali di un quadrilatero completo formano due coppie di poli reciproci rispetto ad una data conica, anche i termini (S, C') della terza diagonale sono reciproci rispetto alla medesima conica [1].

a) Il teorema correlativo potrà servire d'esercizio ai giovani studiosi:

Se due paja di lati opposti di un quadrangolo completo sono formate da rette reciproche rispetto ad una conica, anche gli altri due lati saranno rette reciproche rispetto alla conica medesima.

Del resto, per ottenere il quadrangolo completo qui accennato, basta prendere la figura polare reciproca del quadrilatero considerato nel teorema di Hesse, cioè la figura formata dalle polari de' sei punti TA' . RB' . SC'.

b) La seguente proposizione è un corollario del teorema ora dimostrato:

Due triangoli reciproci rispetto ad una conica sono omologici [2].

Sia ABC un triangolo (fig. 158ª); le polari dei vertici, rispetto alla conica data, formano un altro triangolo $A'B'C'$, reciproco al primo: cioè, reciprocamente, i lati del primo sono le polari dei vertici del secondo. Sia E il concorso delle CA, $C'A'$; ed F il concorso delle AB, $A'B'$. I punti B ed E sono reciproci, perchè E è situato nella $C'A'$, polare di B; e così pure sono reciproci C ed F. Nel quadrilatero formato dalle rette BC, CA, AB, EF abbiamo dunque due coppie di vertici opposti BE, CF, che sono poli reciproci rispetto alla conica data: perciò, la stessa proprietà sarà posseduta dagli altri due vertici, cioè dal punto A e dall'intersezione delle rette BC, EF. La polare di A, che è $B'C'$, passa pertanto pel punto D, comune alle BC, EF; cioè, ne' due triangoli

[1] Hesse, *De octo punctis intersectionis trium superficierum secundi ordinis* (Dissertatio pro venia legendi, Regiomonti 1840), p. 17.

[2] Chasles, *l. c.*, N° 135.

ABC, *A'B'C'*, le coppie di lati corrispondenti si segano in tre punti in linea retta *DEF*. Ne segue (N° 13) che le congiungenti de' vertici *AA'*, *BB'*, *CC'* concorreranno in un punto *O*, polo della retta *DEF*.

c) Combinando questo teorema con quello del N° 118, si può enunciare la seguente proprietà:

Se due triangoli sono reciproci rispetto ad una conica **K**, i sei punti nei quali i lati dell'uno segano i lati non corrispondenti dell'altro sono in una conica **C**; e le sei rette congiungenti i vertici dell'uno ai vertici non corrispondenti dell'altro toccano un'altra conica **C'**, che è la polare reciproca di **C** rispetto a **K** (¹) (N° 232), perchè coteste sei rette sono le polari di que' sei punti rispetto a **K**.

Se dei due triangoli l'uno *A'B'C'* è inscritto nell'altro *ABC*, le tre coniche coincidono in una sola che è circoscritta al primo ed inscritta nel secondo triangolo (Nⁱ 137, 139).

d) Dati due triangoli omologici *ABC*, *A'B'C'*, proponiamoci il problema di costruire la conica, rispetto alla quale essi sono reciproci. Per ottenere i punti in cui questa conica incontra per es. la retta *BC*, basta osservare che essi sono gli elementi doppi dell'involuzione nella quale *B* è conjugato all'intersezione di *BC* con *C'A'*, e *C* è conjugato all'intersezione di *BC* con *A'B'* (N° 220). Siccome i punti *A'*, *B* sono i poli delle rette *BC*, *C'A'*, così essi punti e l'intersezione di queste rette saranno i vertici di un triangolo conjugato (N° 192). Dunque, se cercando le intersezioni della conica colle rette *BC*, *C'A'* col processo suesposto, si trovassero due involuzioni senza elementi uniti, bisognerà concluderne che la conica non esiste; giacchè, quando essa esistesse realmente, due lati del triangolo conjugato dovrebbero incontrarla (N° 195).

Il centro d'omologia *O* de' due triangoli dati (fig. 158ª) è il polo dell'asse di omologia *DEF*: e la corrispondenza projettiva (N° 219) fra i punti (poli) dell'asse e i raggi (polari) uscenti dal centro d'omologia è determinata dalle tre coppie di elementi corrispondenti: *D* ed *AA'*, *E* e *BB'*, *F* e *CC'*; epperò, di qualunque altro punto dell'asse (di qualunque altro raggio per *O*) si potrà costruire linearmente (N° 66) la polare (il polo).

Il discorso fatto qui pel punto *O* e per l'asse d'omologia può ora essere ripetuto per qualunque vertice dell'un triangolo e per la sua polare, che è il corrispondente lato dell'altro triangolo. Infatti, se per es. si considerano il vertice *A'* e il lato *BC*, la corrispondenza projettiva fra i raggi per *A'* e i punti di *BC* è determinata dalle tre coppie d'elementi corrispondenti: *A'B'* e *C*, *A'C'* e *B*, *A'O* e *D*.

(¹) Dico corrispondenti per es. il lato *BC* dell'un triangolo e il lato *B'C'* dell'altro che si oppone al polo *A'* di *BC*, ecc.

Ciò premesso, si può costruire linearmente anche la polare di un punto qualunque P, o il polo di una retta qualsivoglia p. Infatti, se è dato P, noi sappiamo già costruire i poli delle rette PO, PA, PB, PC, PA', ..., i quali giaceranno in una retta, che è la cercata polare di P. Se invece è data la retta p, le polari dei punti in cui essa incontra BC, CA, ... concorreranno in un punto, che è il polo di p.

Ora si badi che tutte queste determinazioni di poli e polari sono lineari (di 1° grado) e indipendenti dalla costruzione della conica fondamentale: la quale è invece un problema di 2° grado, perchè si riduce alla ricerca degli elementi doppi di un'involuzione. La costruzione dei poli e delle polari è dunque sempre possibile, anche quando non esiste la conica fondamentale. Vale a dire: i due triangoli omologici proposti individuano una corrispondenza reciproca fra i punti e le rette del piano, tale che ad ogni punto corrisponde una retta, ad ogni retta un punto, ai raggi di un fascio i punti d'una punteggiata projettiva al fascio, e viceversa. Conveniamo di chiamare polo e polare un punto qualunque e la retta che gli corrisponde; e sistema polare cotesto insieme di poli e polari, che possiede tutte le proprietà di quello che è determinato da una conica fondamentale (N° 188).

Due triangoli omologici individuano pertanto un sistema polare. Se esiste una conica fondamentale, questa è il luogo dei poli situati nelle rispettive polari ed è l'inviluppo delle rette passanti pei rispettivi poli. Se non esiste conica fondamentale, non vi ha alcun punto situato nella propria polare (1).

§ 23. Corollari e costruzioni.

239. Rammentisi il teorema del N° 205, e si supponga che i vertici B, C del triangolo inscritto ABC siano i punti all'infinito di un'iperbole; allora S sarà il centro della curva, e il teorema darà:

Se da un punto (A) dell'iperbole si conducono le parallele agli assintoti, queste incontrano un diametro qualunque in due punti reciproci (F, G). Ossia:

Se per due punti reciproci allineati col centro dell'iperbole si tirano le parallele agli assintoti, queste si segano sulla curva.

Di qui si cava un modo di costruire per punti un'iperbole della quale siano dati gli assintoti e un punto M. Sulla retta SM, che congiunge M al punto S comune agli assintoti, si prenderanno due punti conjugati dell'involuzione determinata dal punto centrale S e dal punto doppio M; cotesti due punti sono reciproci rispetto alla conica (N° 220), epperò conducendo per essi le parallele agli assintoti, i due vertici del parallelogrammo risultante saranno punti della curva da costruirsi.

240. In modo analogo si applichi all'iperbole il teorema del N° 204, supponendo che i lati b, c del triangolo inscritto abc siano gli assintoti:

(1) Staudt, *l. c.*, N° 241.

Se pei punti in cui gli assintoti dell'iperbole sono segati da una tangente qualunque (a) si conducono due parallele (f, g) in direzione arbitraria, queste sono rette reciproche. Ossia:

Due rette reciproche parallele segano gli assintoti in punti situati in una stessa tangente dell'iperbole.

Di qui si cava una regola per costruire le tangenti di un'iperbole, della quale siano dati gli assintoti b, c ed una tangente m. A quest'uopo basta condurre parallelamente ad m due rette conjugate nell'involuzione (N° 99) determinata dal diametro parallelo ad m, come raggio centrale, e da m come raggio doppio. Coteste due rette conjugate sono reciproche rispetto alla conica, epperò, congiungendo i punti in cui esse tagliano gli assintoti, si avrà una tangente della curva.

241. Siano B e C due punti qualunque d'una parabola, ed A il punto ove la curva è incontrata dal diametro che taglia per metà la corda BC. Siano F, G due punti reciproci, situati nel diametro, cioè due punti equidistanti da A (N° 106); in virtù del teorema del N° 205, le rette BF, CG, come pure le rette BG, CF concorreranno sulla curva.

Di qui si ha una costruzione per punti della parabola circoscritta ad un triangolo ABC ed avente per diametro la retta condotta da A al punto di mezzo di BC.

Siano H, H' due punti reciproci, presi nella corda BC, cioè due punti separati armonicamente per mezzo di BC. Siccome i punti H, H' sono in linea retta col polo del diametro che passa per A, così, applicando il teorema stesso del N° 205, si avrà un punto della parabola nell'incontro della AH col diametro per H' (e un altro nell'incontro della AH' col diametro per H). E ciò dà un altro modo di costruire la parabola sotto le condizioni dianzi esposte.

242. Se nel teorema del N° 204 supponiamo che c sia la retta all'infinito, si ha:

Se a, b sono due tangenti della parabola, e se per un punto qualunque del diametro conjugato ad a si conducono due rette reciproche, l'una delle quali passi pel punto ab, l'altra sarà parallela a b, e viceversa.

Così si ha una maniera di costruire per tangenti la parabola, della quale siano date due tangenti a, t, il punto A di contatto di a e la direzione dei diametri. Conducasi per A il diametro che incontri t in O; l'altra tangente t' per O sarà la retta che è separata armonicamente da t mediante il diametro OA e la parallela ad a. Tirinsi ora per O due rette reciproche, cioè due rette h, h' che separino armonicamente t, t'; la parallela ad h' condotta pel punto ha e la parallela ad h condotta pel punto $h'a$ saranno tangenti della parabola cercata.

243. Se nel teorema del N° 204 si suppone che a sia la retta all'infinito, b e c due tangenti della parabola, si ha:

Le rette parallele a due tangenti della parabola, condotte per un punto della corda di contatto, sono reciproche.

Dunque, applicando lo stesso teorema, si avrà ancora:

Se per un punto della corda di contatto di due tangenti b, c della parabola si conducono due rette, h parallela a b ed h' parallela a c, la retta che unisce i punti hc, $h'b$ sarà una tangente della curva (1).

Di qui un mezzo per costruire le tangenti della parabola determinata da due tangenti e dai loro punti di contatto.

244. Nel teorema del N° 205, supponiamo che il triangolo inscritto sia AA_1M, avente due vertici A, A_1 in linea retta col centro O della conica (ellisse od iperbole, fig. 176ª); onde il polo del lato AA_1 sarà il punto all'infinito, comune alle corde bisecate dal diametro AA_1. Il suddetto teorema dà:

Le rette condotte da due punti reciproci P, P' ai termini A, A_1 del diametro, il cui conjugato è parallelo alla PP', concorrono sulla conica.

a) Le coppie di punti reciproci, analoghi a PP', che supporremo presi nel diametro conjugato ad AA_1, formano un'involuzione (N° 220), il cui punto centrale è il centro O della conica. Se questa involuzione ha due elementi doppi B, B_1, questi sono punti della curva, la quale è per conseguenza un'ellisse. Se l'involuzione non ha punti doppi, la conica è un'iperbole (N° 212); allora si possono trovare due punti B, B_1, conjugati nell'involuzione, epperò reciproci rispetto alla conica, i quali abbiano per punto di mezzo O (N° 96, *b*). E nell'un caso e nell'altro, per grandezza del diametro conjugato ad AA_1 s'intende il segmento BB_1 (Ni 218, *b*, 223).

Per l'ellisse si ha (N° 223)

$$OP \,.\, OP' = \text{cost.}^{e} = \overline{OB}^2 = \overline{OB_1}^2.$$

e per l'iperbole

$$OP \,.\, OP' = \text{cost.}^{e} = OB \,.\, OB_1 = -\overline{OB}^2 = -\overline{OB_1}^2.$$

b) Il teorema suesposto ci dà pertanto un modo di risolvere il problema:

Costruire per punti la conica della quale siano dati in grandezza e posizione due diametri conjugati AA_1, BB_1.

Nel caso dell'ellisse (fig. 176ª, *a*) i quattro punti AA_1BB_1 appartengono alla curva; nel caso dell'iperbole (fig. 176ª, *b*), sia AA_1 il diametro che sega la conica.

(1) Delahire, *l. c.*, III, 21.

Nel diametro BB_1 costruiscansi più coppie di punti PP' conjugati nell'involuzione che ha in O il punto centrale, e BB_1 per punti doppi nel 1° caso, ovvero BB_1 per punti conjugati nel 2°. I raggi AP, A_1P' (come pure i raggi A_1P, AP') si segheranno sulla curva.

c) Le OX, OX' condotte per O parallelamente alle AP, AP' sono due diametri conjugati (N° 215). I diametri conjugati formano un'involuzione (N° 225), epperò anche le coppie di punti analoghe ad XX' (ove i diametri incontrano la tangente in A) costituiscono un'involuzione, il cui punto centrale è A, perchè OA e la OB, parallela ad AX, sono due diametri conjugati. Se la conica è un'iperbole, l'involuzione de' diametri conjugati ha due raggi doppi, che sono gli assintoti; dunque, i punti K, K_1, ove AX incontra gli assintoti, sono i punti doppi dell'involuzione XX'....

Nella figura (176ª *b*) è segnato un solo dei punti KK_1.

d) Dai triangoli uguali OPA, AXO si ha $AX = -OP$; e dai triangoli uguali $OP'A_1$, $AX'O$ si ha del pari $AX' = OP$ (¹). Ma (*a*) si ha $OP \cdot OP' = \pm \overline{OB}^2$, dunque $AX \cdot AX' = \mp \overline{OB}^2$, ossia:

Il rettangolo de' segmenti che due diametri conjugati determinano sopra una tangente fissa, a partire dal punto di contatto, è costantemente uguale al quadrato ($\mp \overline{OB}^2$) del semidiametro parallelo alla tangente fissa.

e) Nel caso dell'iperbole, i punti K, K_1 sono gli elementi doppi dell'involuzione nella quale A è il punto centrale e XX' due punti conjugati; dunque $AX \cdot AX' = \overline{AK}^2 = \overline{OB}^2$, epperò $AK = OB$. Ciò significa che la figura $OAKB$ è un parallelogrammo; ossia:

Se si costruisce un parallelogrammo su due semidiametri conjugati dell'iperbole, una delle diagonali è un assintoto, e l'altra diagonale è parallela al secondo assintoto (²).

Che l'altra diagonale AB sia parallela al secondo assintoto risulta dal segare colla AB il fascio armonico (N° 225) formato dai due assintoti e dai due diametri conjugati OA, OB. Siccome la sezione di un assintoto è il punto di mezzo di AB, così la sezione dell'altro sarà all'infinito (N° 51).

(¹) Per rendersi conto de' segni, basta osservare che nel caso dell'ellisse OP, OP' hanno lo stesso senso, mentre AX, AX' hanno sensi opposti; nel caso dell'iperbole OP ed OP' sono opposti, AX ed AX' sono nello stesso senso.

(²) Apollonio, *l. c.*, II, 1.

f) Sia X_1 il punto il cui diametro OX incontra la tangente in A_1. Siccome OX', OX_1 sono (*c*) due rette reciproche passanti per un punto della AA_1, corda di contatto delle tangenti AX, A_1X_1, così (N° 204) la congiungente $X'X_1$ sarà una tangente della conica.

Il punto di contatto di questa tangente è M, punto comune alle AP, A_1P' (N° 244).

g) Osserviamo ancora che $X'X_1$ è una diagonale del parallelogrammo contenuto dalle tangenti in A, A_1 e dalle parallele ad AA_1 tirate per P, P'; al quale risultato si giunge anche colla considerazione seguente. I punti di un diametro hanno per polari le parallele al diametro conjugato (N° 212); dunque, essendo P, P' due punti reciproci, condotte per essi le parallele ad AA_1, la prima sarà la polare di P', la seconda la polare di P; epperò esse parallele sono anche rette reciproche. Se ora applichiamo il teorema del N° 204 a queste rette reciproche ed alle due tangenti in A, A_1, otteniamo la seguente proprietà:

Se in un parallelogrammo due lati opposti sono tangenti alla conica, e gli altri due lati sono rette reciproche parallele al diametro conjugato a quelle tangenti, le diagonali sono pur esse tangenti alla conica.

h) Si ha così la seguente soluzione del problema:

Costruire per tangenti la conica della quale siano dati in grandezza e posizione due diametri conjugati AA_1, BB_1.

Supposto essere BB_1 il diametro che non sega la conica, allorchè questa è un'iperbole, si determini in esso una coppia di punti P, P' conjugati nell'involuzione che ha il punto centrale in O (centro della curva), e BB_1 per punti doppi nel caso dell'ellisse, o per punti conjugati nel caso dell'iperbole. Condotte per A, A_1 le parallele a BB_1 e per P, P' le parallele ad AA_1, le diagonali del parallelogrammo risultante saranno tangenti della conica cercata.

k) I segmenti AX, A_1X_1 sono uguali ed opposti; ma si è veduto (*d*) essere $AX \,.\, AX' = \mp OB^2$, dunque $AX' \,.\, A_1X_1 = \pm OB^2$; vale a dire:

Il rettangolo de' segmenti che una tangente variabile ($X'X_1$) fa su due tangenti parallele fisse, a partire dai loro punti di contatto, è costantemente uguale al quadrato ($\pm OB^2$) del semidiametro parallelo alle tangenti fisse [1].

[1] Cfr. N° 123.

i) Siccome la retta OB divide per metà la striscia compresa fra le AX, A_1X_1, così i segmenti che le AM, A_1M determinano risp. sulle A_1X_1, AX (a partire da A_1, A) sono doppi di OP, OP'. Ma pel teorema *a*), si ha $OP.OP' = \text{cost.}^e$; dunque:

Le rette condotte dagli estremi di un diametro dato ad un punto qualunque della conica determinano sulle tangenti conjugate al diametro due segmenti (a partire dai punti di contatto), il cui prodotto è costante [1].

l) Siccome (N° 216) il punto X è quello in cui la tangente in A è incontrata dalla tangente parallela ad $X'X_1$, così l'enunciato (*k*) può anche esprimersi così:

Il rettangolo de' segmenti (AX, AX') che due tangenti parallele variabili fanno su di una tangente fissa, è costantemente uguale al quadrato ($\pm OB^2$) del semidiametro parallelo alla tangente fissa.

m) Il teorema del N° 244 serve anche a risolvere il problema:

Di una conica sono dati due punti A, A_1 estremi di un diametro, un terzo punto M, e la direzione del diametro conjugato ad AA_1; trovare la grandezza del secondo diametro.

Conducasi per O, punto di mezzo di AA_1, il diametro del quale è data la direzione, e questo si tagli colle congiungenti AM, A_1M ne' punti P, P'; indi si prenda OB media proporzionale fra OP, OP': sarà OB la metà della grandezza cercata.

n) Il teorema *d*) dà una costruzione delle coppie dei diametri conjugati, ed in particolare degli assi di un'ellisse, della quale siano dati in grandezza e direzione due semidiametri conjugati OA, OB (fig. 177ª). Condotta per A la parallela ad OB, questa sarà la tangente in A, e due diametri conjugati qualisivogliano la incontreranno in due punti X, X', tali che si avrà $AX.AX' = -\overline{OB}^2$. Dunque se nella normale in A si prendono due segmenti AC, AD uguali ad OB, ogni circolo descritto per C e D taglierà la suddetta tangente in due punti X, X' dotati di quella proprietà, cioè in due punti che uniti ad O dànno le direzioni di due diametri conjugati. Se il circolo si fa passare per O, l'angolo XOX' sarà retto, epperò OX, OX' saranno le direzioni degli assi [2].

245. Per le estremità A, A' (fig. 178ª) di due semidiametri conjugati OA, OA' di una conica si conducano, in una direzione arbi-

[1] Apollonio, *l. c.*, lib. III, 53.
[2] Cfr. Chasles, *Aperçu hist.*, p. 45 e 362; *Sections coniques*, N° 205.

traria, due corde parallele AB, $A'B'$ (1). Per costruire i punti B, B', basta congiungere i poli di dette corde; la congiungente sarà il diametro OX che contiene i punti di mezzo delle corde medesime.

Sia OX' il diametro conjugato ad OX, cioè il diametro parallelo alle corde AB, $A'B'$. I gruppi di quattro raggi $O(XX'AB)$, $O(X'XA'B')$ sono armonici (N° 51), epperò projettivi; dunque le coppie di raggi $O(XX'.AA'.BB')$ sono in involuzione (N° 94). Ma le coppie $O(XX'.AA')$ determinano l'involuzione de' diametri conjugati (N^i 98, 225), dunque anche OB, OB' sono due semidiametri conjugati. Ossia:

Se dai termini A, A' di due semidiametri conjugati si tirano due corde parallele AB, $A'B'$, i punti B, B' saranno termini di altri due semidiametri conjugati.

Due diametri AA, BB determinano quattro corde AB che sono i lati di un parallelogrammo (N^i 194, 215). I diametri risp. conjugati $A'A'$, $B'B'$ dànno in ugual modo un altro parallelogrammo, i cui lati sono paralleli a quelli del primo; cioè ogni corda AB è parallela a due corde $A'B'$ e non parallela a due altre corde $A'B'$.

a) Siano H, K i punti in cui AB è incontrata dalle OA', OB'; il semidiametro OX, che divide per metà $A'B'$, passerà anche pel punto di mezzo di HK, cioè AB ed HK hanno lo stesso punto di mezzo; dunque $AH = KB$ ed $AK = HB$. I triangoli OAH, OBK sono perciò equivalenti (2); e così pure i triangoli AHB', BKA'; epperò anche i triangoli OAB', $OA'B$. Ossia:

Il parallelogrammo costruito su due semidiametri (OA, OB') è equivalente al parallelogrammo costruito sui due semidiametri risp. conjugati.

In modo analogo si dimostra l'equivalenza de' triangoli OAB, $OA'B'$.

Per la medesima ragione sono equivalenti i triangoli AKA' e BHB', ed i triangoli OAK ed OBH, epperò anche i triangoli OAA', OBB'; ossia:

Il parallelogrammo costruito su due semidiametri conjugati ha un'area costante (3).

(1) Nel caso che la conica sia un'iperbole, se A è un punto della curva, A' sarà l'estremo di un diametro ideale, definito come ai N^i 218 *b*), 223. In questo caso anche $A'B'$ sarà una corda ideale.

(2) Baltzer, *Planim.*, p. 104. (3) Apollonio, *l. c.*, lib. VII, 31, 32.

b) Siano M, N i punti di mezzo delle corde non parallele AB, $A'B'$. Siccome (N° 215) AB, $A'B'$ hanno le direzioni di due diametri conjugati, e siccome ON è il diametro conjugato alla corda $A'B'$, così sarà ON parallela ad AB; e similmente sono parallele le OM, $A'B'$; gli angoli OMA, ONA' sono perciò uguali o supplementari; e siccome i triangoli OMA, ONA' sono equivalenti, perchè metà de' triangoli equivalenti OAB, $OA'B'$, così si avrà l'uguaglianza

$$OM \,.\, AM = \pm ON \,.\, NA' \quad (^1).$$

Projettinsi ora (fig. 178ª, *a* e *b*) i punti $AMBA'NB'$ dal punto all'infinito di OB sulla $B'B'$. Il rapporto dei segmenti paralleli AM ed ON, OM ed NA' è uguale a quello delle loro projezioni; così che dall'uguaglianza suesposta si dedurrà che il rettangolo delle projezioni di OM, AM è uguale al rettangolo delle projezioni di ON, NA'. Siccome i raggi projettanti sono paralleli ad OB, così le projezioni di OM, MA sono entrambe uguali alla metà della projezione di BA, ossia a quella di OA. Essendo N il punto medio di $A'B'$, la projezione di ON sarà la semisomma delle projezioni di OA', OB'; e la projezione di NA' sarà metà della projezione di $A'B'$, cioè la semidifferenza delle projezioni di OA', OB'. Epperò si ha

$$(\text{proj. } OA^2) = \pm \text{proj. } (OA' + OB') \times \text{proj. } (OB' - OA')$$

ossia

$$(\text{proj. } OA')^2 \pm (\text{proj. } OA)^2 = (\text{proj. } OB')^2.$$

c) Analogamente, se si projettassero que' medesimi punti su OB, mediante raggi paralleli ad OB' (fig. 178ª, *c*), si otterrebbe

$$(\text{proj. } OA)^2 \pm (\text{proj. } OA')^2 = (\text{proj. } OB)^2.$$

Vale a dire:

Se due semidiametri conjugati qualisivogliano si projettano sopra un diametro fisso, mediante raggi paralleli al diametro conjugato a quest'ultimo, la somma (per

(1) Il doppio segno, cagionato dalla direzione relativa de' segmenti OM, NA', e de' segmenti ON, AM, corrisponde al caso dell'ellisse (fig. 178ª, *a*) ed a quello dell'iperbole (fig. 178ª *b* e *c*).

l'ellisse) o la **differenza** (per l'iperbole) dei **quadrati delle projezioni è costantemente uguale al quadrato del semidiametro fisso.**

La somma dei quadrati delle projezioni ortogonali di un segmento sopra due rette fra loro perpendicolari è uguale al quadrato del segmento, in virtù del teorema pitagorico ([1]); dunque, se due diametri conjugati si projettano ortogonalmente sull'uno e sull'altro asse della conica, e se si fa la somma dei quadrati delle projezioni di ciascun diametro sui due assi, si ottiene il teorema:

La somma (per l'ellisse) o la **differenza** (per l'iperbole) dei **quadrati di due semidiametri conjugati qualisivogliano è costante, cioè sempre uguale alla somma dei quadrati** dei semiassi ([2]).

246. I lati BC, CA, AB di un triangolo (fig. 179ª) seghino una conica nelle coppie di punti DD', EE', FF'. Considerando il triangolo anzidetto, i cui lati incontrano le trasversali DE, $D'E'$ ne' punti DD', EE', GG', si hanno pel teorema di Menelao (N° 104, b) le uguaglianze:

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AG}{BG} = 1, \quad \frac{BD'}{CD'} \cdot \frac{CE'}{AE'} \cdot \frac{AG'}{BG'} = 1.$$

Il quadrangolo $DEE'D'$ è inscritto nella conica; la trasversale AB taglia i suoi lati opposti e la conica in tre coppie di punti AB, GG', FF', che sono in involuzione, pel teorema di Desargues (N° 143); dunque si avrà (N° 94) l'uguaglianza di rapporti anarmonici $(ABFG) = (BAF'G')$, dalla quale $(ABFG) = (ABG'F')$, ossia $(ABFG) : (ABG'F') = 1$, che è quanto dire

$$\frac{AF \,.\, AF'}{BF \,.\, BF'} : \frac{AG \,.\, AG'}{BG \,.\, BG'} = 1.$$

Questa uguaglianza e le prime due, moltiplicate fra loro, dànno la:

$$(1) \qquad \frac{BD \,.\, BD'}{CD \,.\, CD'} \cdot \frac{CE \,.\, CE'}{AE \,.\, AE'} \cdot \frac{AF \,.\, AF'}{BF \,.\, BF'} = 1$$

relazione esprimente un celebre teorema dovuto a Carnot ([3]).

([1]) Baltzer, *Planim.*, 104. ([2]) Apollonio, *l. c.*, lib. VII, 12, 13, 22, 25.
([3]) *Géométrie de position*, p. 437.

a) Viceversa, se sui lati BC, CA, AB si hanno tre coppie di punti DD', EE', FF', e se i segmenti da essi determinati insieme coi vertici soddisfanno alla relazione (1), questi sei punti apparterranno ad una stessa conica. Infatti, descrivasi la conica determinata dai cinque punti $DD'EE'F$, e sia F'' il punto in cui essa segherà di nuovo AB. Avremo allora, in virtù del teorema di Carnot, una relazione che differirà dalla (1) in ciò che il punto F' sarà surrogato da F''. Questa relazione confrontata colla (1) dà $AF' : BF' = AF'' : BF''$, donde $(ABF'F'') = 1$, ossia $(F''F'BA) = 1$; dunque (N° 57, *e*) F' ed F'' coincidono.

b) Se il punto A si allontana all'infinito (fig. 180ª), i rapporti $AF : AE$, $AF' : AE'$ tendono verso l'unità; perciò l'equazione (1) diviene in questo caso

$$\frac{BD \,.\, BD'}{CD \,.\, CD'} \cdot \frac{CE \,.\, CE'}{BF \,.\, BF'} = 1. \tag{2}$$

Conducasi parallelamente a BC una retta che seghi CEE' in Q e la conica in PP'; la formola precedente applicata alle trasversali DD', PP', darà

$$\frac{QE \,.\, QE'}{CE \,.\, CE'} \cdot \frac{CD \,.\, CD'}{QP \,.\, QP'} = 1,$$

e moltiplicando fra loro le ultime due equazioni,

$$\frac{BD \,.\, BD'}{BF \,.\, BF'} = \frac{QP \,.\, QP'}{QE \,.\, QE'},$$

vale a dire:

Se per un punto qualsivoglia (Q) si conducono ad una conica due trasversali in direzioni date, il rapporto dei prodotti dei segmenti ($QP.QP' : QE.QE'$) che la curva fa su di esse, a partire dal loro punto comune, è costante [1].

c) Se nella formola (2) si suppone che la conica sia un'iperbole, e invece di BC si assuma un suo assintoto HK, il rapporto $HD \,.\, HD' : KD \,.\, KD'$ avrà il valore 1, epperò

$$HF \,.\, HF' = KE \,.\, KE',$$

[1] Apollonio, *l. c.*, lib. III, 16–23. — Desargues, *l. c.*, p. 202. — Delahire, *l. c.*, V, 10, 12.

ossia:

Se per un punto qualunque H (ossia H') di un assintoto si conduce una trasversale in direzione data a segare l'iperbole in due punti F, F'' (ossia D, D'), il rettangolo de' segmenti $HF \,.\, HF''$ (ossia $H'D \,.\, H'D'$) è costante.

Se il diametro parallelo alla direzione data $H'D$ incontra la curva in due punti S, S', e sia O il centro, avremo

$$HD \,.\, HD' = OS \,.\, OS' = -\overline{OS}^2.$$

Se il diametro OT parallelo alla direzione data HF non sega la curva, si potrà condurre una tangente parallela ad esso: e presane la porzione compresa fra l'assintoto e il punto di contatto, il quadrato di questa porzione sarà uguale a $HF \,.\, HF''$, appunto in virtù dell'attuale teorema. Ma quella porzione è uguale al semidiametro parallelo OT (N° 244, e), dunque $HF \,.\, HF'' = \overline{OT}^2$. Ossia:

Se una retta sega l'iperbole in F, F' (in D, D') ed un assintoto in H (in H') il prodotto $HF . HF''$ (il prodotto $H'D' . H'D'$) è uguale a $\pm$ il quadrato del semidiametro OT (OS) parallelo alla segante; valendo il segno $+$ o il segno $-$, secondo che la curva ha o non ha tangenti parallele alla segante.

d) Se la segante incontra l'altro assintoto in L (in L'), avremo (N° 151) $HF'' = FL$ (ossia $H'D' = DL'$), epperò anche $FH \,.\, FL = -\overline{OT}^2$ (ossia $DH' \,.\, DL' = \overline{OS}^2$); cioè:

Se una retta condotta da un punto F (D) dell'iperbole sega gli assintoti in H, L (in H', L'), il prodotto $FH \,.\, FL$ ($DH' \,.\, DL'$) è uguale a $\mp$ il quadrato del semidiametro parallelo alla segante ($-$ o $+$, secondo che la curva abbia o non abbia tangenti parallele alla segante).

e) Di qui si trae una maniera di costruire gli assi di un'iperbole, della quale siano dati in grandezza e direzione due semidiametri conjugati OF, OT (fig. 181a). S'incominci dal costruire gli assintoti. A quest'uopo, se OF è il diametro che deve segare la curva, tirisi per F la parallela ad OT; essa sarà la tangente in F; e prese nella medesima le parti FP, QF uguali ad OT, saranno OP, OQ gli assintoti (N° 244, e). Ora, per ottenere le direzioni OX, OY degli assi, basterà trovare le bissettrici degli angoli degli assintoti, ossia i due raggi conjugati ortogonali dell'involuzione i cui raggi doppi sono OP, OQ (Ni 225, 226).

Per F guidisi la parallela ad OX, sino a segare gli assintoti in B, B'; facciasi in OX il segmento OS medio proporzionale fra FB, FB'; sarà OS la grandezza del semiasse diretto secondo OX, il quale segherà o no la curva, secondo che i segmenti FB, FB' hanno lo stesso senso o sensi opposti. Da ultimo, costruito il parallelogrammo, un lato del quale sia OS, un altro lato sia diretto secondo OY e una diagonale secondo un assintoto, il lato OR sarà la grandezza dell'asse diretto secondo OY (N° **244**, *e*).

f) Nel piano di un triangolo ABC abbiansi due punti O, O'; le OA, OB, OC incontrino risp. i lati opposti BC, CA, AB, in D, E, F; avremo pel teorema di Ceva (N° 104, *a*):

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = -1.$$

Similmente, se le $O'A, O'B, O'C$ incontrano i lati opposti in D', E', F', si avrà

$$\frac{BD'}{CD'} \cdot \frac{CE'}{AE'} \cdot \frac{AF'}{BF'} = -1.$$

Moltiplicando fra loro queste due equazioni, si ottiene la (1); dunque:

Se da due punti arbitrari si projettano i vertici di un triangolo risp. sui lati opposti, si ottengono sei punti, pei quali passa una conica.

Per esempio: i punti di mezzo dei lati di un triangolo e i piedi delle perpendicolari abbassate dai vertici opposti sui lati stessi sono sei punti di una conica ([1]).

247. Problema. — Costruire una conica che passi per tre punti dati ABC e rispetto alla quale siano reciproci i punti conjugati di un'involuzione data in una retta u (fig. 182ª).

Le rette AB, AC incontrino u in D, E, i conjugati dei quali, nell'involuzione data, siano D', E'. Sia poi D'' il punto separato armonicamente da D mediante A e B; ed E'' il punto armonicamente separato da E mediante A e C. Allora, essendo D reciproco sì a D', sì a D'', sarà $D'D''$ la polare di D; e similmente $E'E''$ sarà la polare di E.

Conducansi le BE, CD sino a segare risp. le $E'E''$, $D'D''$ in punti E_0. D_0 che saranno reciproci il primo ad E, il secondo a D. Perciò, se si costruiranno i punti B', C' in modo che i gruppi $BB'EE_0$, $CC'DD_0$ siano armonici, i punti B', C' apparterranno alla curva domandata.

Nella figura le coppie FF', GG' sono quelle che individuano in u la data involuzione di punti reciproci.

248. Problema. — Costruire la conica che passa per quattro punti dati $QRST$ e che divide armonicamente un dato segmento MN (fig. 183ª).

La retta MN seghi le coppie di lati opposti del quadrangolo $QRST$ in A ed A', B e B'. Se la conica cercata incontra la MN in due punti, questi

([1]) Che è un cerchio. Cfr. Steiner nel t. XIX degli *Annales de Mathématiques* (Montpellier 1828), p. 42.

formeranno una coppia dell'involuzione determinata da AA', BB' (N° 143). Per conseguenza, se l'involuzione i cui punti doppi sono MN e l'involuzione determinata dalle coppie AA' . BB' hanno una coppia comune PP', la conica cercata passerà per ciascuno de' punti P, P' (N^i 96 *a*, 164).

Per costruire questi punti, si descriva un cerchio ad arbitrio (N° 164), e da un punto O di esso si projettino sulla circonferenza i punti $AA'BB'MN$ in $A_1A_1'B_1B_1'M_1N_1$ [1]. Se V è il punto comune alle A_1A_1', B_1B_1', e se U è il punto comune alle tangenti in M_1, N_1, le rette per U e le rette per V determinano sulla circonferenza, e quindi (mediante projezione da O) sulla retta MN le coppie di punti conjugati dell'una e dell'altra involuzione. Tirata la UV, se questa incontra il cerchio in due punti, projettando questi da O, si avranno i punti cercati P, P'.

Sia W il polo della UV rispetto al cerchio. Ogni retta per W, la quale seghi il cerchio, determina su di questo e quindi sulla MN due punti separati armonicamente mediante PP', cioè due punti reciproci rispetto alla conica cercata. Dunque, se la UV non sega il cerchio, onde non si possano costruire i punti PP', tireremo per W due rette a segare il cerchio; projetteremo da O i punti d'intersezione sulla MN, ed ivi otterremo due coppie di punti, che individueranno l'involuzione de' punti reciproci rispetto alla conica. Il problema sarà così ridotto a quello che è trattato nel N° precedente.

249. PROBLEMA. — Costruire la conica che passa per quattro punti dati $QRST$ e per due punti conjugati (non dati) di un'involuzione data in una retta u.

Questo problema è analogo al precedente; giacchè si tratta di costruire la coppia di punti conjugati comune all'involuzione data e a quella che è determinata in u dalle paja di lati opposti del quadrangolo $QRST$ (N° 143). La coppia cercata esiste realmente, se l'involuzione data non ha punti doppi; e i punti che la costituiscono appartengono alla conica cercata. Se l'involuzione data ha due punti doppi M, N, il problema attuale coincide assolutamente con quello del N° 248.

Questo problema e i due che precedono ammettono evidentemente una soluzione unica.

250. Si consideri un'iperbole i cui assintoti siano ortogonali (fig. 184ª). Siccome gli assintoti separano armonicamente due diametri conjugati qualisivogliano (N° 225), così gli angoli dei due diametri conjugati avranno gli assintoti per bissettrici (N° 52). Ma i due semidiametri conjugati sono i lati di un parallelogrammo le cui diagonali hanno le direzioni degli assintoti (N° 244, *e*); questo parallelogrammo sarà adunque un rombo, vale a dire, ogni

[1] Vedi la prima Nota a piè della pagina 109.

diametro è uguale al suo conjugato. Per questa proprietà, l'iperbole nel caso che si considera dicesi equilatera [1].

a) Siccome le rette condotte da un punto qualunque M della curva ai termini P, P' di un diametro hanno le direzioni di due diametri conjugati (N° 215), così sono uguali (e di senso opposto) gli angoli che le PM, $P'M$ fanno con ciascun assintoto. Se i punti P, P' restano fissi, mentre M percorra la curva, i raggi PM, $P'M$ descrivono due fasci inversamente uguali (N° 80, *b*).

b) Viceversa, i raggi corrispondenti di due fasci inversamente uguali si segano in punti il cui luogo è un'iperbole equilatera. Che questo luogo debba essere una conica, risulta dall'essere i due fasci projettivi (N° 78). Ciascuno di questi ha due raggi fra loro perpendicolari, i quali sono ordinatamente paralleli ai corrispondenti dell'altro fascio (N° 80, *b*); dunque la conica ha due punti all'infinito, situati in due direzioni ortogonali; vale a dire, essa è un'iperbole equilatera. I centri P, P' de' due fasci sono i termini di un diametro; infatti la tangente p in P è il raggio corrispondente alla $P'P$ riguardata come raggio p' del 2° fascio; e la tangente q' in P' corrisponde alla PP' considerata come raggio q del 1° fascio (N° 114, *a*). Ma gli angoli pq, $p'q'$ devono essere uguali ed opposti; dunque, essendo p' e q una sola e medesima retta, le p, q' sono parallele.

c) I vertici di un triangolo ABC ed il punto D comune alle sue altezze sono i vertici di un quadrangolo completo, nel quale ciascun lato è perpendicolare al suo opposto, ed i cui sei lati determinano sulla retta all'infinito tre coppie di punti che da un punto arbitrario S si projettano mediante tre coppie di rette ortogonali. Queste tre coppie appartengono dunque ad un'involuzione, nella quale ogni raggio è perpendicolare al suo conjugato (Ni 101 a sinistra, 95, 163).

Ma quest'involuzione di raggi projetta da S quell'involuzione di punti che, in virtù del teorema di Desargues (N° 143), è segnata sulla retta all'infinito dalle coppie di lati opposti del quadrangolo e dalle coniche (iperboli [2]) ad essi circoscritte. Dunque le coppie di raggi conjugati della prima involuzione dànno le direzioni degli assintoti di queste coniche; ossia:

[1] Apollonio, *l. c.*, lib. VII, 21. — Delahire, *l. c.*, V, 13.

[2] Nessuna ellisse, nè alcuna parabola è circoscritta al quadrangolo in discorso (N° 170, *a*).

Tutte le coniche passanti pei vertici e pel concorso delle altezze di un triangolo sono iperboli equilatere.

d) Viceversa, se per tre vertici *ABC* di un triangolo si descrive una iperbole equilatera, essa passerà necessariamente anche pel punto *D* comune alle altezze. Infatti, s'imagini un'altra iperbole determinata (N° 125) dai quattro punti *ABCD* e da uno de' punti all'infinito della iperbole data; essa sarà equilatera in virtù del teorema che precede, epperò passerà anche pel secondo punto all'infinito della data. Le due iperboli hanno così cinque punti comuni (*A*, *B*, *C* e due punti all'infinito), dunque esse coincidono (N° 116, *b*), c. d. d. Dunque:

In ogni triangolo inscritto in un'iperbole equilatera, il punto comune alle altezze è situato nella curva.

e) Se il punto *D* s'accosta infinitamente ad *A*, cioè se l'angolo *BAC* divien retto, ne risulta:

In ogni triangolo rettangolo *EFG* (fig. 184ª) inscritto in un'iperbole equilatera, la tangente al vertice *E* dell'angolo retto è perpendicolare all'ipotenusa.

f) Per quattro punti dati *QRST* passa una ed una sola iperbole equilatera (N° 249). Il punto comune alle altezze in uno qualunque de' triangoli *QRS*, *RST*, *STQ*, *QRT* appartiene alla curva [1].

251. Abbiasi una conica, un punto *S* e la sua polare *s*. Una retta per *S* incontri la conica in *A*, *A'*. Se si vuol costruire la figura omologica alla conica data (N° 18), assumendo *S* come centro d'omologia, *s* come asse d'omologia, e *A'* come punto corrispondente ad *A*, ogni altro punto *B'* corrispondente ad un punto *B* della conica sarà situato nella conica medesima. Infatti, se *AB* incontra *s* in *P*, il punto *B'* comune ad *SB*, *A'P* è un punto della curva (N° 186). Dunque la curva omologica alla data sarà la data medesima. Due punti (o due rette) corrispondenti sono separati armonicamente mediante *S* ed *s* [2].

Alla retta all'infinito corrisponderà adunque la retta *j* parallela ad *s* ed equidistante da *s* e da *S*; ed i punti in cui *j* incontra la conica corrisponderanno ai punti all'infinito della conica medesima.

[1] Teoremi di Brianchon e Poncelet in una memoria inserita nel t. XI degli *Annales de Mathématiques* (Montpellier 1821), e riprodotta nel t. 2° (p. 504) delle *Applications d'analyse et de géométrie* di Poncelet (Paris 1864).

[2] Questa è la così detta omologia armonica: cfr. Bellavitis, *Saggio di Geometria derivata* (vol. 6 dei *Nuovi Saggi* dell'Accademia di Padova, 1838), § 50.

Di qui si cava una regola assai semplice per conoscere se un arco dato di conica, piccolo quanto si voglia, appartenga ad un'ellisse, ad una parabola o ad un'iperbole. Nell'arco si tiri una corda s e si costruisca il polo S; indi si conduca la j parallela ad s ed equidistante da S e da s. Se j non incontra l'arco, questo appartiene ad un'ellisse (fig. 185ª, a). Se j tocca l'arco in un punto J, l'arco appartiene ad una parabola, della quale SJ sarà un diametro (fig. 185ª, b); finalmente, se j sega l'arco in due punti J_1, J_2 (fig. 185ª, c), la curva sarà un'iperbole, avente gli assintoti paralleli ad SJ_1, SJ_2 (1).

252. Problema. — Dati di posizione due diametri conjugati, ed inoltre una tangente e il punto di contatto, costruire la curva (fig. 186ª).

La tangente data incontri in P, Q i diametri dati, il cui punto comune sia O. Projettisi il punto di contatto M in P' sulla OP mediante una parallela ad OQ, e in Q' sulla OQ mediante una parallela ad OP. Ogni punto di OP è polo di una retta parallela ad OQ; inoltre P, M sono punti reciproci, giacchè la polare di M, che è la tangente, passa per P. Dunque la polare di P è MP', epperò anche P, P' sono punti reciproci. Allora facciasi $OA = OA'$ media proporzionale fra OP ed OP', e sarà AA' la grandezza del diametro diretto secondo OP (N° 218, a). Similmente, si avrà la grandezza BB' dell'altro diametro, prendendo $OB = OB'$ media proporzionale fra OQ, OQ'.

Se i punti P, P' cadono da una stessa parte rispetto ad O, l'involuzione de' punti reciproci ha due punti doppi A, A' (N° 98), cioè il diametro OP sega la curva. Se invece O è fra P, P', l'involuzione non ha punti doppi, il diametro non incontra la curva. In questo caso, A, A' sono due punti reciproci che equidistanno da O.

La figura presenta due casi: quello dell'ellisse (a) e quello dell'iperbole (b).

253. Problema. — Date di posizione due coppie di diametri conjugati a ed a', b e b', ed inoltre un punto M, costruire la conica.

1ª Soluzione (fig. 187ª). — Da M conducasi parallelamente a ciascun diametro una corda il cui punto di mezzo cada nel diametro conjugato. I secondi estremi A, A', B, B' delle quattro corde così condotte saranno punti della conica cercata (N° 206).

2ª Soluzione (fig. 188ª). — S'indichi con c il diametro MOM', e si costruisca il raggio c' conjugato di c nell'involuzione determinata dalle coppie aa', bb'; sarà c' il diametro conjugato di c (N° 225). Per M, M' conducansi risp. le parallele ad a, a', le quali si segheranno in un punto della curva (N° 216) ed incontreranno c' in P, P'. Questi punti sono dunque reciproci (N° 244); così che prendendo in c' due altri punti Q, Q' conjugati nell'involuzione determinata dalla coppia PP' e dal punto centrale O, le MQ, $M'Q'$ si segheranno in un punto della curva. Se poi in c' si fa $ON = ON'$ media proporzionale fra OP, OP', saranno N, N' gli estremi del diametro c' (N° 218, a).

(1) Poncelet, *l. c.*, Ni 225 e 226.

3ª Soluzione. — Dai termini M, M' del diametro che passa pel punto dato conducansi le parallele ad a, a', che si segheranno in un punto A della curva, e le parallele a b, b', che si segheranno in un altro punto B della curva medesima (N° 216). Indi, prolungando AO, BO in A', B' in modo che sia $OA' = AO$, $OB' = BO$, anche A', B' saranno punti della conica cercata (N° 210).

254. Problema. — Costruire la conica della quale si conoscano di posizione due coppie di diametri conjugati aa', bb' ed una tangente t.

1ª Soluzione. — Si costruisca la tangente t' parallela a t (distante dal centro quanto lo è t); congiungendo i punti in cui t, t' segano a, a', si avranno due altre tangenti uu' parallele (N° 216); ed un terzo pajo vv' si otterrà unendo i punti d'intersezione di t, t' con b, b' (fig. 189ª).

2ª Soluzione. — I diametri conjugati a ed a', b e b' incontrino t ne' punti A ed A', B e B'. Le coppie di punti AA', BB' determinano un'involuzione il cui punto centrale è il punto di contatto di t (N° 244, c). Così il problema è ridotto ad uno già risoluto (N° 252). Se l'involuzione ha punti doppi, congiungendoli ad O, si otterranno gli assintoti.

255. Problema. — Costruire la conica della quale siano dati di posizione due diametri conjugati a, a' ed inoltre due punti M, N (fig. 190ª).

Siano M', N' i secondi estremi de' diametri passanti pei punti dati. Per M, M' conducansi le MH, $M'H$ parallele ad a, a'; e similmente per N, N' le NK, $N'K$ parallele ad a, a'. I punti H, K apparterranno alla curva da costruirsi (N° 216).

Problema. — Costruire la conica della quale siano dati di posizione due diametri conjugati b, b' ed inoltre due tangenti m, n (fig. 191ª).

Costruiscansi le tangenti m' parallela ad m ed n' parallela ad n; congiungansi i punti in cui m, m' segano a, a'; e così pure i punti in cui n, n' segano a, a'. Le congiungenti t e t', u ed u' sono altrettante tangenti della curva cercata (N° 216).

256. Problema. — Dati cinque punti di una conica, costruire due diametri conjugati che comprendano un angolo dato [1].

Si trovi un diametro AA' della conica (N° 213); su di esso si descriva un segmento di cerchio capace dell'angolo dato, e si cerchino i punti in cui la circonferenza sega di nuovo la conica (N° 176, b). Se uno di questi punti è M, le AM, $A'M$ avranno le direzioni di due diametri conjugati. Ma l'angolo AMA' è uguale al dato; dunque conducendo i diametri paralleli ad AM, $A'M$, questi risolveranno il quesito.

Se il segmento descritto è il semicerchio, l'attuale costruzione dà gli assi.

257. Problema. — Costruire la conica rispetto alla quale un dato triangolo EFG sia conjugato, e un dato punto P sia il polo di una data retta p [2].

La retta data p incontri FG in un punto A; la polare di A passerà per

(1) Delahire, *l. c.*, II, 38. (2) Staudt, *Geometrie der Lage*, N° 237.

E polo di *FG* e per *P* polo di *p*, cioè sarà la *EP*; similmente *FP*, *GP* saranno le polari de' punti *B*, *C* in cui *p* sega *GE*, *EF*. Sia *A'* il punto in cui *FG* è segata dalla *EP*; saranno *FG* ed *AA'* due coppie di punti reciproci, e se l'involuzione da essi determinata ha due punti doppi LL_1, questi saranno situati nella curva domandata (N° 220). Uguale considerazione vale per gli altri due lati del triangolo *EFG*.

Se il punto *P* è interno al triangolo *EFG*, i punti *A*, *B*, *C* riescono interni ai lati (finiti) *FG*, *GE*, *EF*. La retta *p* può segare due di questi lati o essere tutta esterna al triangolo. Nel 1° caso, nei due lati accennati le involuzioni de' punti reciproci sono entrambe dotate di punti doppi (N° 98, *a*): si avranno così quattro punti della curva cercata, e il problema sarà ridotto a descrivere per quattro punti dati una conica, rispetto alla quale due altri punti dati riescano reciproci (N° 248). Nel 2° caso, in ciascun lato del triangolo *EFG*, le due coppie di punti reciproci sono separate l'una mediante l'altra, epperò l'involuzione manca di punti doppi (N° 98); in questo caso adunque la conica non incontrerebbe alcuno dei lati del triangolo conjugato, cioè essa non esiste (N° 195).

Se il punto *P* è esterno al triangolo, uno solo de' tre punti *A*, *B*, *C* riesce interno al lato corrispondente. Se gli altri due lati sono segati internamente da *p*, le involuzioni mancano tutte di punti doppi, cioè la conica non esiste. Invece se *p* sega internamente il primo lato, ovvero se è tutta esterna al triangolo, la conica esiste, e si costruisce com'è detto superiormente.

In tutti questi casi, cioè, sia o non sia la conica reale, esiste il s i s t e m a p o l a r e (N° 238, *d*), individuato dal triangolo coniugato *EFG*, dal punto *P* e dalla retta *p*. Il problema della costruzione di cotesto sistema è l i n e a r e, mentre la costruzione della conica fondamentale è di 2° grado.

258. Problema. — Dato un pentagono *ABCDE*, costruire la conica, rispetto alla quale ciascun vertice è il polo del lato opposto ([1]).

Sia *F* l'intersezione di *AB*, *CD*. Se si costruisce (N° 257) la conica **K** rispetto alla quale *ADF* sia un triangolo conjugato ed *E* il polo di *BC*, i punti *B*, *C* ne' quali *BC* è segata dalle *AF*, *DF* saranno i poli delle *ED*, *EA*, che congiungono il punto *E* coi punti *D*, *A*. Dunque ciascun vertice del pentagono sarà il polo del lato opposto; ossia la conica **K** sarà la domandata.

Se si costruiscono la conica **C** che passa pei cinque vertici e la conica **C**' che tocca i cinque lati del pentagono (N° 116, *b*), queste coniche saranno polari reciproche rispetto a **K** (N° 232).

259. Problema. — Dati in un piano cinque punti *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, dei quali tre qualunque non siano in una stessa retta, trovare un punto *M*, tale che il fascio *M* (*A* . *B* . *C* . *D* . *E*) sia projettivo ad un fascio dato *abcde* (fig. 192ª).

Per *D* tirinsi due rette *DD'*, *DE'* in modo che il fascio *D*(*A* . *B* . *C* . *D'* . *E'*) sia projettivo ad *abcde* (N° 66, a destra). Costruiscasi il punto *E'* in cui

([1]) Staudt, *l. c.*, N° 238, 258.

DE' incontra la conica determinata dai quattro punti $ABCD$ e dalla tangente DD' (N° 128); e quindi si trovi il punto M in cui la stessa conica incontra la EE'. Sarà M il punto cercato. Infatti, essendo $MABCDE'$ punti di una stessa conica, si ha il gruppo $M(A.B.C.D.E')$ projettivo al gruppo $D(A.B.C.D'.E')$, che è, per costruzione, projettivo al dato fascio $abcde$. Ma ME' passa per E, dunque il problema è risoluto.

Si risolva per esercizio anche il problema correlativo:

Trovare una retta m che incontri cinque rette date $abcde$, tre qualunque delle quali non concorrano insieme, in cinque punti formanti un gruppo projettivo ad una punteggiata di cinque punti dati $ABCDE$ (¹).

260. Problema. — Dividere un dato arco circolare AB in tre parti uguali (²).

Nella circonferenza data (fig. 193ª) prendasi a partire da A un arco arbitrario AN, e a partire da B, ma in senso opposto, un arco doppio BN'. Condotta la tangente BT, gli angoli AON, TBN' sono uguali ed opposti di senso; ossia, se i punti N, N' variano simultaneamente, i raggi ON, BN' generano due fasci inversamente uguali. Il luogo del punto M ad essi comune sarà adunque un'iperbole equilatera (N° 250, b), i cui assintoti hanno le direzioni delle bissettrici SX, SY degli angoli delle AO, BT: giacchè queste rette sono raggi corrispondenti (sono quelle posizioni de'raggi mobili ON, BN', per le quali gli archi AN, BN' sono nulli). Il centro dell'iperbole è il punto di mezzo della retta OB, congiungente i centri de'due fasci.

Costruita l'iperbole per mezzo del teorema di Pascal, si ottiene un punto P, ov'essa attraversa l'arco dato AB; ivi coincidono due punti corrispondenti N, N', epperò P è il punto cercato di trisezione dell'arco dato: l'arco AP è la metà di PB.

L'iperbole incontra la circonferenza in due altri punti R, Q. Il punto R dà la trisezione dell'arco che con AB completa la semicirconferenza. Il punto Q dà la trisezione dell'arco che si ha togliendo AB dalla circonferenza intera.

261. Si è veduto (N° 149) che, se $P'P''Q'Q''$ sono quattro punti dati in linea retta e, descritta per $P'P''$ una conica ad arbitrio, le si conduca una tangente da Q' ed una tangente da Q'', la corda di contatto passa per uno de' punti doppi M', N' dell'involuzione determinata dalle coppie $P'P''$, $Q'Q''$. Le due tangenti da Q' combinate colle due tangenti da Q'' dànno quattro corde di contatto, due delle quali passeranno per M', le altre due per N'.

Di qui si ricava un modo di costruire i punti doppi dell'involuzione $P'P''$, $Q'Q''$, ossia (N° 98, a) di trovare due punti M', N' che dividano armonicamente due segmenti dati $P'P''$, $Q'Q''$. Per $P'P''$ descrivasi un cerchio e ad esso si tirino le tangenti t', u' da Q' e le tangenti t'', u'' da Q''. La corda di contatto delle tangenti $t't''$ e quella delle tangenti $t'u''$ incontreranno la retta $P'P''$ ne' punti cercati M', N' (fig. 194ª).

(¹) Staudt, *l. c.*, N° 263.
(²) Chasles, *Sections coniques*, N° 37. — Staudt, *Beiträge*, N° 432.

a) Questa costruzione fu adoperata da Brianchon ([1]) nella soluzione de' due problemi, che noi abbiamo trattato al N° 171.

1° Costruire una conica della quale siano dati tre punti P, P', P'' e due tangenti q, q'.

Le tangenti date incontrino PP' in Q, Q' e PP'' in R, R'. Al cerchio descritto per $PP'P''$ conducansi le tangenti da Q, Q'; le corde di contatto segheranno PP' in due punti M, N; e condotte del pari le tangenti da R, R', le corde di contatto incontreranno PP'' in due altri punti M', N'. Allora ciascuna delle congiungenti MM', MN', $M'N$, NN' incontrerà q, q' in due punti di contatto fra queste due rette ed una conica circoscritta al triangolo $PP'P''$.

Questa costruzione non differisce da quella esposta nel N° 171 (a sinistra) che pel modo di trovare i punti doppi $MNM'N'$.

2° Costruire una conica della quale siano dati due punti P', P'' e tre tangenti q, q', q''.

Le tre tangenti date incontrino $P'P''$ ne' tre punti Q, Q', Q'' (fig. 194ª). Ad un cerchio arbitrariamente descritto per $P'P''$ si conducano le tangenti da Q, Q', Q''; le corde di contatto delle tangenti da Q'' combinate con quelle da Q incontrano $P'P''$ in due punti M, N; e le corde di contatto delle tangenti da Q'' combinate con quelle da Q' determinano analogamente due punti M', N'.

Per la conica cercata, la corda di contatto delle tangenti qq'' passerà adunque per M o per N; e la corda di contatto delle tangenti $q'q''$ passerà per M' o per N'. Le quattro combinazioni MM', MN', NM', NN' dànno le quattro soluzioni del problema.

Il quale è così ridotto al seguente: descrivere una conica che tocchi tre rette date q, q', q'', in modo che le corde di contatto delle tangenti qq'', $q'q''$ passino risp. per due punti dati M, M'. Indichiamo con $QQ'Q''$ il triangolo formato dalle tre tangenti date, e con A, A', A'' i punti di contatto, da determinarsi (fig. 195ª). Per un corollario del teorema di Desargues (N° 152), il lato $q \equiv Q'Q''$ è diviso armonicamente dal punto di contatto A e dalla corda $A'A''$. Si suppongano projettati questi quattro punti armonici da A'' su MQ'', e ne risulterà che il segmento RQ'' della MQ'', intercetto fra le q', q'', è diviso armonicamente da M e dalla $A'A''$.

Dunque, tirata la MQ'', che seghi q'' in R, trovisi il punto V, che con M divida armonicamente RQ''. (A quest'uopo tirisi ad arbitrio una retta per M a segare q'', q' in S, T, e si congiunga Q col punto U comune alle SQ'', TR; la congiungente incontrerà RQ' in V). Tirata la VM', questa incontrerà q', q'' in A', A'', e la MA'' segherà $Q'Q'$ in A.

262. Teorema. — Se due angoli AOS, $AO'S$ di grandezza invariabile ruotano intorno ai rispettivi vertici, in modo che il punto S comune a due lati

([1]) Brianchon, *l. c.*, p. 47 e 51.

si conservi sopra una retta fissa u, l'intersezione A degli altri due lati descrive una conica (fig. 196ª).

Si dimostra immediatamente considerando i fasci projettivi generati dai raggi mobili OA ed OS, OS ed $O'S$, $O'S$ ed $O'A$ (Ni 36, 82). Questo teorema fu dato da NEWTON (1) sotto il nome di descrizione organica delle coniche.

Lo studioso si proponga di dedurne una regola per descrivere una conica per cinque punti dati O, O', A, B, C; ossia, dati questi cinque punti, determinare la grandezza de'due angoli AOS, $A'OS$ e la retta u, affinchè il luogo geometrico risultante sia una conica contenente i cinque punti dati.

Potrà inoltre esercitarsi nel dimostrare le seguenti proprietà:

Se sulla retta OO', che unisce i vertici dei due angoli dati, si descrive un cerchio capace di un angolo uguale alla differenza fra quattro retti e la somma degli angoli dati, la conica sarà un' iperbole, un' ellisse, o una parabola, secondo che la retta data u seghi il cerchio in due punti, o non lo incontri, o gli sia tangente. — Determinare gli assintoti dell'iperbole, i diametri della parabola.

Quand'è che la conica risulta un cerchio? Quando un'iperbole equilatera?

Trattare il caso in cui gli angoli dati siano supplementari. Allora la conica risulta un'iperbole; però, se u ed OO' sono parallele, si ha una parabola (2).

263. TEOREMA. — Se un triangolo varia in modo che i suoi lati girino intorno a tre punti dati O, O', S, mentre due vertici A, A' percorrono due rette fisse u, u', il luogo del terzo vertice M è una conica, che passa pei punti O, O', pel punto uu', e pei punti B, C' ove u, u' segano rispettivamente $O'S$, OS.

264. TEOREMA (che comprende in sè il precedente come caso particolare). — Se un poligono varia in modo che i suoi lati girino intorno ad altrettanti punti fissi O_1, O_2, O_3, ... (fig. 198ª), mentre i suoi vertici, meno uno, si muovano su rette fisse u_1, u_2, u_3, ..., l'ultimo vertice descriverà una conica; ed anche il punto comune ad ogni coppia di lati non consecutivi avrà per luogo geometrico una conica (3).

Si dimostri questo teorema ed il suo correlativo (4).

265. TEOREMA. — Se due angoli sono circoscritti ad una conica, i quattro punti di contatto de' loro lati, ed i loro vertici sono sei punti di un'altra conica.

Si dimostra, ponendo in evidenza la projettività de' fasci che projettano i quattro primi punti dai due vertici; al quale uopo si osserva che i primi quattro raggi costituiscono un gruppo projettivo a quello de' loro poli relativi alla conica data.

(1) *L. c.*, lib. I, lemma 21.
(2) MACLAURIN, *Geometria organica* (Londini 1720), sectio 1ª.
(3) Teorema di MACLAURIN e di BRAIKENRIDGE (Trans. fil. di Londra, 1735).
(4) PONCELET, *l. c.*, N° 502.

266. Teorema (correlativo del precedente). Se due angoli sono circoscritti ad una conica, i quattro lati e le due corde di contatto sono sei tangenti di una stessa conica ([1]).

Basta dimostrare che le due corde tagliano le altre quattro rette in due gruppi projettivi di punti; il primo gruppo essendo projettivo a quello formato dalle polari relative alla conica data.

267. Problemi. — *a*) Dati tre segmenti AA', BB', CC' in una medesima retta, trovare un punto dal quale si veggano tutti e tre sotto angoli uguali (N° 83, *d*).

Quand'è che questi angoli possono essere retti? (Cfr. N° 98, *b*).

b) Date due punteggiate projettive sovrapposte, trovare il punto che da un punto dato (nella retta data) è separato armonicamente mediante i due punti uniti (non dati) ([2]).

c) Date due coppie di punti in linea retta, trovare in questa retta un quinto punto, tale che il prodotto delle sue distanze dai due punti della prima coppia sia al prodotto delle distanze dai punti della seconda coppia in un rapporto dato ([3]).

d) Per un punto dato condurre una trasversale che determini su due rette date, a partire da punti dati, due segmenti il cui rapporto o il cui prodotto sia dato ([4]).

268. Teorema. — Se in ciascuna diagonale d'un quadrilatero completo si prendono due punti che la dividano armonicamente, e se tre de' sei punti così presi (uno su ciascuna diagonale) sono in linea retta, anche gli altri tre saranno in linea retta.

Corollario: i tre punti di mezzo delle diagonali di un quadrilatero completo sono in linea retta.

269. Teorema. — Se un triangolo ABC è inscritto in un cerchio, e se da un punto O della circonferenza si abbassano sui lati altrettante oblique OA', OB', OC', sotto un angolo comune (di grandezza e senso), i piedi A', B', C' di queste oblique sono in linea retta (fig. 199ª).

Condotte per O le OA'', OB'', OC'' parallele risp. a BC, CA, AB, si dimostra facilmente che gli angoli AOA'', BOB'', COC'' hanno comuni le bissettrici; quindi la stessa proprietà compete agli angoli AOA', BOB', COC'. Donde segue (N° 106, *b*) che i lati di questi tre angoli sono accoppiati in involuzione; epperò (N° 103) i punti A' B' C' sono in linea retta ([5]).

270. Teorema. — Dato un triangolo circoscritto ad un cerchio, se dai suoi vertici si abbassano sopra una tangente tre oblique, le quali siano vedute

([1]) Chasles, *Sections coniques*, N¹ 213, 214. ([2]) Chasles, *Géom. sup.*, N° 269.

([3]) Problema della sezione determinata di Apollonio. Cfr. Chasles, *Géom. sup.*, N° 281.

([4]) Problemi della sezione di ragione e della sezione di spazio di Apollonio. Cfr. Chasles, *Géom. sup.*, N¹ 296 e 298.

([5]) Chasles, *l. c.*, N° 386.

dal centro sotto angoli uguali (in grandezza e senso), le tre oblique concorrono in uno stesso punto ([1]).

Dimostrazione analoga a quella del teorema precedente.

271. Un utilissimo esercizio sarà quello di applicare la teoria dei poli e delle polari alla risoluzione de' problemi di 1° e 2° grado col mezzo della sola riga, supposto che sia dato un cerchio fisso ed il suo centro O. Diamone alcuni esempi:

a) Per un punto dato P condurre la parallela ad una retta data e.

Si trovi il polo E di e ([2]) e la polare p di P; sia A il punto comune alle rette p, OE; la polare a di A sarà la retta cercata.

b) Per un punto dato P condurre la perpendicolare ad una retta data e.

Conducasi per P la parallela alla OE; sarà essa la retta cercata.

c) Dividere un segmento dato AB per metà.

Siano a, b le polari di A, B; sia c il diametro che passa pel punto ab; la retta d che rende armonico il gruppo $abcd$ avrà per polo il punto di mezzo di AB.

d) Dividere per metà un arco MN del cerchio dato.

Si trovi il polo S della corda MN; il diametro che passa per S darà il punto medio cercato dell'arco MN.

e) Dividere per metà un angolo dato.

Conducendo per un punto del cerchio le parallele ai lati dell'angolo dato, il problema attuale si riduce al precedente.

f) Prolungare un segmento AC di una parte uguale CB.

Siano a, c le polari di A, C; sia d il diametro che passa pel punto ac, e c il raggio che rende armonico il gruppo $abcd$. Il raggio c avrà per polo il punto cercato C.

g) Costruire il cerchio che ha il centro in un punto dato U, e il raggio uguale ad una retta data UA.

Si prolunghi AU di una parte uguale UB; si conducano in A, B le perpendicolari ad AB e si dividano per metà gli angoli retti A, B: le bissettrici concorrano in C, D. Allora si risolverà il problema costruendo la conica che ha i diametri conjugati AB, CD (N° **244**, *n*).

([1]) Chasles, *l. c.*, N° 387.

([2]) Poli e polari rispetto al cerchio dato.

FINE DEL VOL. 1°.

INDICE

ERRATA.

Pag. 27, *linea* 16, *invece di* operazioni *leggi* projezioni.
» 79, *la nota* (1) *dev'essere:* Möbius, *l. c.*, N° 278.
» 87, *linea* 16, *invece di* $AB'AB'$ *leggi* $AB'A'B$.
» 100, » 37, *invece di* $\frac{(A)}{(A')'}$, *leggi* $\frac{(A')}{(A')'}$.
» 102, *la nota* (1) *dev'essere:* Bellavitis, *Saggio di geometria derivata* (Nuovi Saggi dell'Accademia di Padova, vol. 4°, 1838), p. 270, nota.
» 105, *linea* 30, *invece di* $AB'AB'$ *leggi* $AB'A'B$.
» 111, » 27, » uniti » doppi.
» 155, » 1, » sei » cinque.

Prezzo del Vol. I (Testo e Figure)

L. 3, 50

ELEMENTI

DI

GEOMETRIA PROJETTIVA

DI

LUIGI CREMONA

PROFESSORE NEL R. ISTITUTO TECNICO SUPERIORE DI MILANO

AD USO DEGLI ISTITUTI TECNICI

DEL REGNO D'ITALIA

Volume I (Figure)

1873

G. B. PARAVIA E COMP.

ROMA – TORINO – MILANO – FIRENZE.

ELEMENTI
DI
GEOMETRIA PROJETTIVA

PER

GLI ISTITUTI TECNICI

DEL

REGNO D'ITALIA

DI

LUIGI CREMONA

PROFESSORE NEL R. ISTITUTO TECNICO SUPERIORE DI MILANO

Vol. I.

FIGURE

1873

G. B. PARAVIA E COMP.

ROMA — TORINO — MILANO — FIRENZE

1874, Oct. 7.
Farrar Fund.

Fig. 1.
Fig. 2
Fig. 3.
Fig. 4.

Fig. 5
s
O
A
A'
b
b'
a
a'
s
Fig. 6
s
j
a'
O
a
A
A'
P
J
a'
a
s
j
Fig. 7
M'
m
s
s
m
O
N
J,
J₂
j
j
N'
M

Fig. 8
M
N'
m'
O
M'
N
m
j
J
j
A
s
s
A'
Fig. 9
N
m'
M
O
M'
N'
m
j
j
A
s
s
A'

Fig. 10
O
A'
A
s
s
A
Fig. 11
B
P
D
C
G
E
Fig. 12
e
a
g
f
c
d
b
Fig. 14.
a
c
d
b
A
Fig. 13.
B
D
C
A
B
D
C
A
B
D
C
a
c
d
b
a
d
c
b

Fig. 15.
s
B
A
D
C
A'
D'
B'
C'
s
S
Fig. 16.
a
d
b
c
s
s
d'
b'
S
a'
c'

Fig. 17.
O
A
B
C
D
A'
B'
C'
D'
Fig. 18.
d
c
b
a,
a'
b'
c'
d'
s
s
Fig. 19.
S
C
B
A
C''
B''
A''
A'
B'
C'
S'
Fig. 20.
A
A'
B,
C
B'
C'
Fig. 21
S
A
A
B'
B
C
C'
A''
A,
B,
B''
S,
C,
C''
O

Fig. 22
N
M
Q
K
L
N'
M'
K'
L'
s
A
C
B
D
s
Fig. 23
a
c
b
A
m
C
B
n
Q
l
d
R
k
P
D
S
d
k'
m'
l'
n'
b
c
a
Fig. 24
A
C
B
D
d
b
a
D'
B'
C'
A'

Fig. 25
A
B
A
B
Fig. 26
A
C
B
D
L
T
U
K
Q
S
M
V
N
Fig. 27
A
F
C
B'
A'
D
C'
E
B

Fig. 28
L
A
C
B
N
Fig. 29
a
b
A
c
B
d
S
D
d
R
P
c
a
b
Fig. 30
d
d
S
A
C
B
a
b
c

Fig. 31
O
J
D
I'
A'
C'
B'
D'
B
C
A
Fig. 32
A
C
D
B
A'
S
B'
Fig. 33
A
C
B
O
D

Fig. 34
G
H
A
C
B
A'
D
B'
O
Fig. 35
G
H
C
O
E
D
A
A'
B'
B
Fig. 36
G
A
A'
B
B'
O
H

Fig. 37
A
B
D
C
M
G
N
E
F
Fig. 38
I'
u'
A'
B'
u'
u
A
B
J
u
Fig. 39
u"
D"
S'
J"
D'
u'
C'
A'
B'P'J'
Q'
u
C"
A"
B"
u
D J Q C A
B
P
u
S
J"
u"
Fig. 40
a
d
c
b
s
d'
c'
b'
a'
s
Fig. 41
S
O
b
a
a'
c
c'
b'
s
A
A'
B
B'
C
C'
s

Fig. 42
s
C
S
a
b
c
A
B
C
u
u
A'
B'
a
b'
C'
c'
O
B'
s
a
b'
A
Fig. 43
b
c'
B'
a
B
c
C'
A'
C
L
Fig. 44
K
Q
M
N
A
C
B
D
Fig. 45
s'
c'
U'
b'
U
p
q'
U''
d
p'
q
b
c
d'
d''
a'
b''
c''
a''
a
s
s
s'

Fig. 46
U
q
p'
U'
a'
p
q'
c'
b'
U"
c
b
a
Fig. 47
u'
C'
D'
u"
I'
Q'
A'
B'
P'
u
Q
A
B
P
J
C
D
u
u'
u"
Fig. 48
u'
B'
u"
u
A
C
A'
B
u
C'
u'
u"
Fig. 49
U
U'
b'
c
a
c'
U"
b
a'

Fig. 50
S
u
C
u"
B
A
N
M
O
A'
B'
C'
u'
Fig. 51
u"
M
N
u"
u
A'
C
B
u
S
u'
B'
C'
A'
u'
Fig. 52
U
U"
U'
a'
c
b
b'
c'
a
s
n
m
s
Fig. 53
B
u
A
C
D
u"
S'
u
S
u'
D'
B'
A'
C'
u'
Fig. 54
U"
d'
s'
d
U
U'
s
b'
a
a'
c
b
c'

Fig. 55
Fig. 56
Fig. 56 bis
Fig. 56 ter
Fig. 57
Fig. 58

Fig. 71
H
A
B
C
O
A'
B'
C'
G
Fig. 72
G
A
B
C
D
O
A'
B'
C'
D'
H
Fig. 73
A
B
T
B'
S
P
Q
A'
R
C
C'
Fig. 74
r
q
s
a'
b'
t
c
c'
a
b
Fig. 75
R
T
Q
A
B
O
A'
B'
S

Fig. 76
O''
O
O'
p
q'
c
b
a
b'
a'
q
p'
P
Q'
A
T
Q
A'
M
P'
Fig. 77
Fig. 78
x
C'
B'
A'
X
D'
x
A
B
M
C
D
a
b
c
d

Fig. 79
O
A
B
D
C
O'
Fig. 80
Q
O'
P'
P
D
C
B
A
o
a
b
c
d
D'
C'
Q'
A'
B'
o'
Fig. 81
b
a
x
X
d
A
c
D
B
C
Fig. 82
Q
A'
q
B'
A
P'
s
P
B
s

Fig. 83
H'
B
s
Q
A
O
A''
Q'
s'
s
B''
A'
H''
s'
B'
Fig. 84
Fig. 85
Q
C'
C
B'
P
A
A'
B
R
P
C
B
A
D
Q
P'
Fig. 86
C'
B'
A'
D'
Q'

Fig. 87
A
B
p
Q
C
p'
q'
Fig. 88
B
C
Q
A
Fig. 89
M
A
O
M'
p
B
C
q'
Fig 90
b'
H
a
q
p
r
b
c
c'
a'
Fig. 91
A
C
B
P
R
Q
B'
C'
r
A'
Fig. 92
R
r
Q
C
A'
A
P
C'
r
B'

Fig. 93
C
A'
R
r
B
B'
Q
C'
P
r
Fig. 94
P
B'
r
Q
C
A
C'
r
Fig. 95
B
A'
r
P
Q
C'
C
r
Fig. 96
B'
C
A'
B
R
P
Fig. 97
b
a
a'
b'
r
q
p
c'
c

Fig. 98
a
c
b'
a'
H
q
p
r
Fig. 99
c
c'
b'
a'
b
p
r
a'
q

Fig. 100
Q
P
R
A'
B'
B
b
r
A
C
Fig. 101
P
B'
B
A
Q
A'
R
Fig. 101 bis
R
P
Q
B
A
B'
r
A'
Fig. 102
f
c
a
E
D
C
G
d
F
e
B
A
b
g
Fig. 103
b
c
A
C
a
d
H

Fig. 104
E
P
F
A
B
R
D
O
C
Q
Fig. 105
a
b
a'
r
r'
q
b'
c
Fig. 106
s
B'
P'
Q
A
T
C
B
P
A'
R
S
c
C'
s
Fig. 107
R
q
r
P
b
T
t
R,
s
a
P,
T,
P'
p
b'
p'
a'
c
c'
S
Fig. 108
4
8
5
1
6
s
s
3
2
7

Fig. 109
S
1
2
3
4
5
6
7
8
Fig. 110
s
B
Q
R
P
A
A'
S
P'
B'
s
Fig. 111
S
a
q
p'
b
p
b'
a'
s
r
Fig. 112
U
B'
P'
S
A
Q
P
B
Fig. 113
S
p
p'
b
a
b'
q
s

Fig. 114
B
P
P
B'
B
P'
P'
B'
Fig. 115
U
B
Q
P
B'
V
S
s
A
O
Fig. 116
q
s
v
b
o
a
b'
u
S
p
Fig. 117
O
U
B'
B
P
Fig. 118
D
A
s
M
B
D'
C
A'
N
s
B'
C'

Fig. 119
a)
b)
c)
Fig. 120
a)
b)
Fig. 121
Fig. 122

Fig. 123
B
O
M
C
A
R
B'
Q
C'
A'
N
Fig. 124
C
M
C'
B
A'N
B'A
P
O
C
M
C'
Q
B
A
B'
N
A'
R
Fig. 125
O
B
Q
A
N
R
A'
M
B'
S
Fig. 126
A
N
A'
B'
M
B
B'
M
A'
N
R
B
A
Q
O
O
A'
Fig. 127
B
S
B'
A

Fig. 128
B'
C
A
S
O
A'
B
C'

Fig. 129

a)
B
A
H
G
E
S
T
E'
H'
C'
A'
B'
b)
B'
A'
G'
C
E'
S
E
T
H
B
H'
A

Fig. 130
S
A
E
M
B
G'
A'
U
N
G
H'
E'
R
B'
V
T
T

Fig. 131
S
H'
A
B
M
V
A'
C'
N
H
G
U
B'

Fig. 132
Fig. 133
Fig. 134
Fig. 135
Fig. 136

Fig. 137
A'
B'
A
B
N
M
Q
S
T
R
Fig. 138
n
a'
a
b'
m
b
S
r
s
Fig. 139
Q
T
S
m
R
O
a'
a
b'
b
n
Fig. 140
C'
A
q
s
D
B
P
C,
A,
P''
D''
P'
B'
Fig. 141
p'
p''
p
s
b'
Q
a
d''
d
a,
c
c,

Fig. 142
Fig. 143
Fig. 144

Fig. 145
Fig. 146
Fig. 147
Fig. 148
Fig. 149

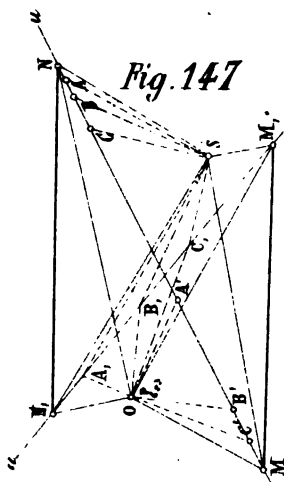
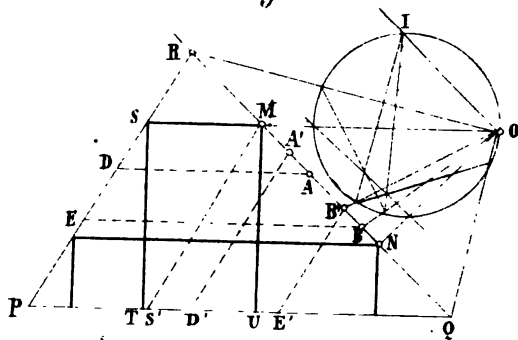
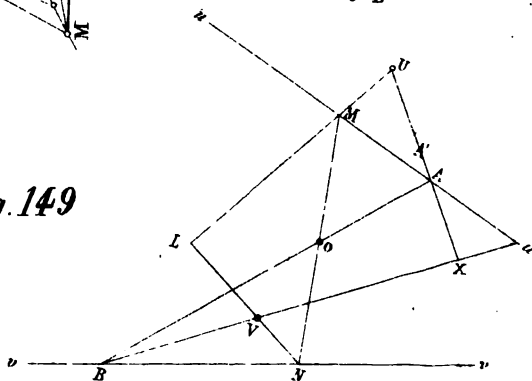
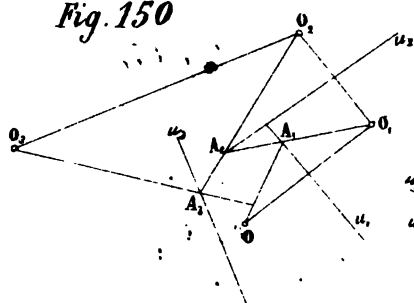
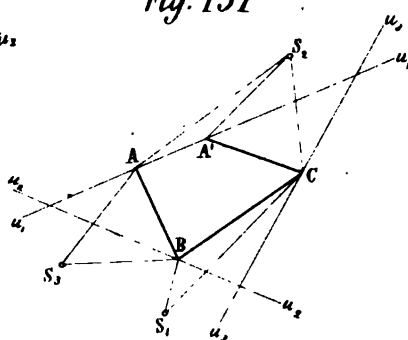



Fig. 150
Fig. 151
Fig. 152
Fig. 153
Fig. 154
Fig. 155

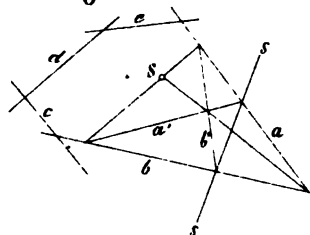
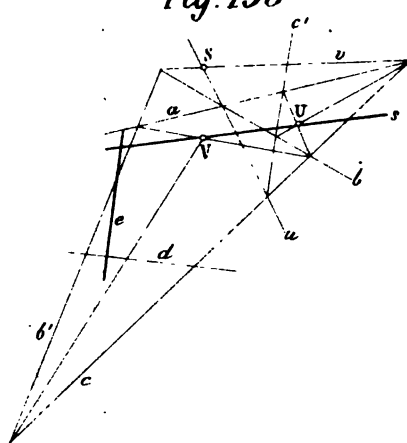
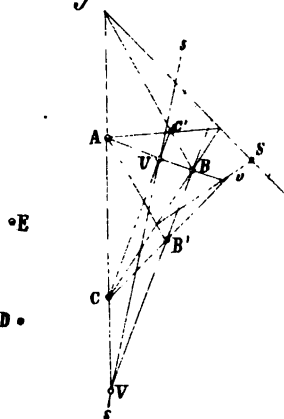
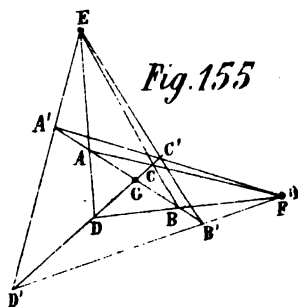
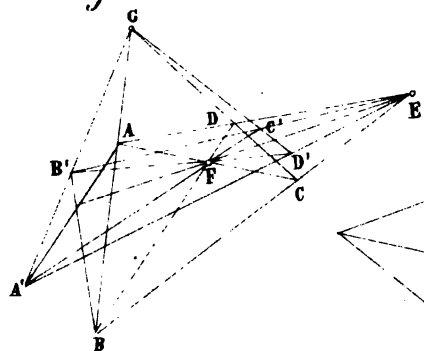
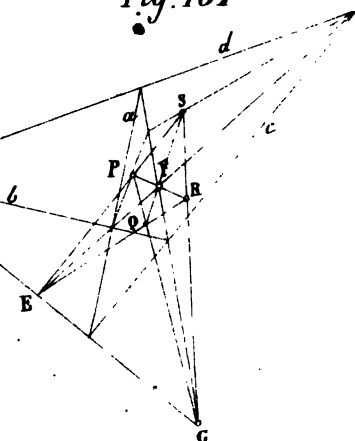



Fig. 156
Fig. 157
Fig. 158
Fig. 159
Fig. 160

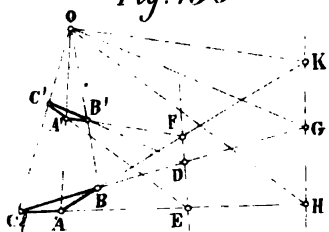
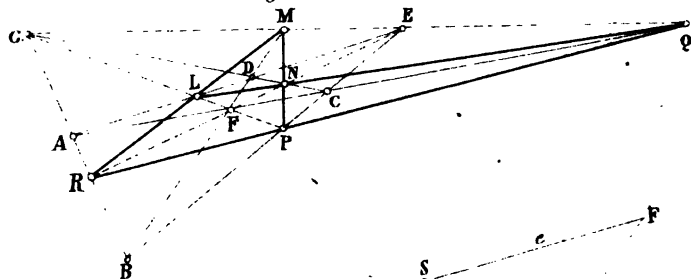
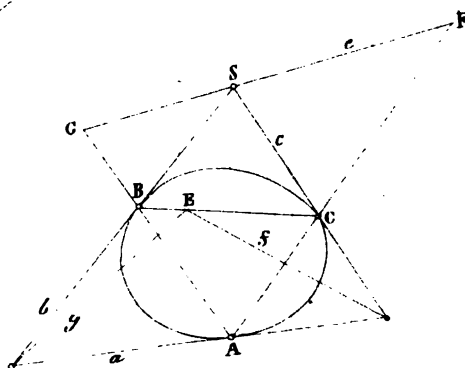
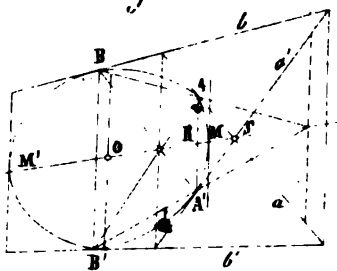
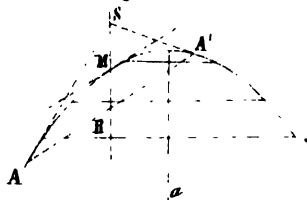



Fig. 161
Fig. 162
Fig. 163
Fig. 164
Fig. 165
Fig. 166
Fig. 167
Fig. 168

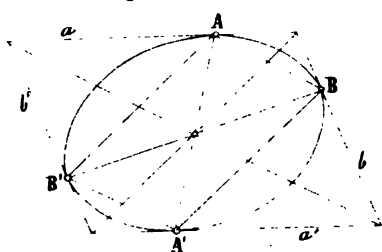
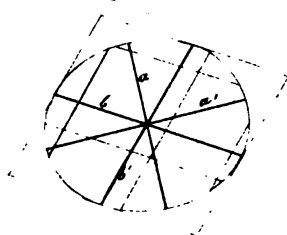
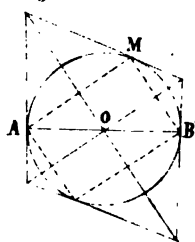



Fig. 169
C
B
F
D
A
Fig. 170
a
b
n
m
b'
a'
Fig. 171
d
c
a
b
Fig. 172
a
O
Fig. 173
C
K
M'
C'
N'
Fig. 174
C
D
B1
B
C1
E
E1
F
A
Fig. 175
O
S
A
R
M
Q
P
u
u'
R'
A'
S'
P'
Q'
O'

Fig. 176
P
X,
M
M'
B
X'
P'
A
O
A,
B,
X
a)
M
X
M'
X'
P'
B,
A
O
A,
K
B'
X,
P
b)
Fig. 177
B
C
O
Q
X'
P
A
X
D
Fig. 178
A
X
B'
N
B
a)
K
A'
X'
M
A'
H
O
B
B'
A
A
A'
X
N
b)
X'
M
B'
H
B
K
O
B
B'
A'
A
X
A'
N
B'
A
c)
X'
M
H
K
B
O
B
A
B'
A'

Fig. 179
Fig. 180
Fig. 181
Fig. 182
Fig. 183
Fig. 184

Fig. 185
a)
b)
c)
Fig. 186
a)
b)
Fig. 187
Fig. 188
Fig. 189
Fig. 190
Fig. 191
Fig. 192

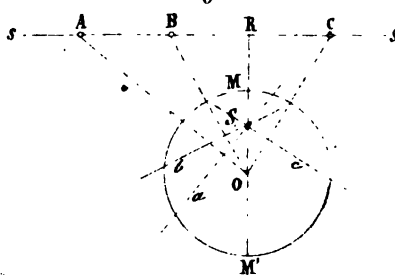
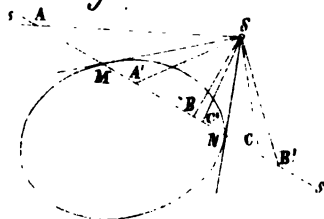
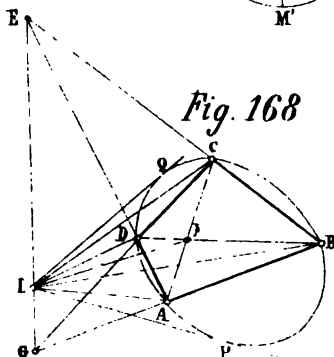
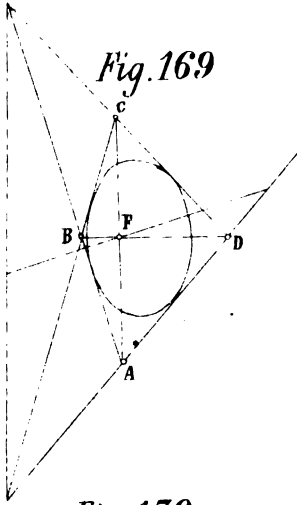
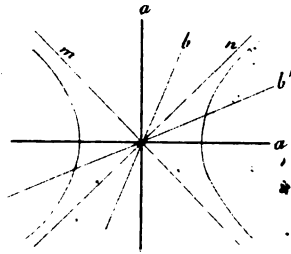
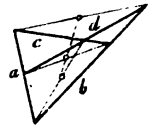
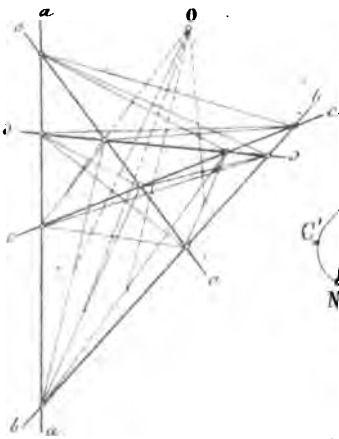
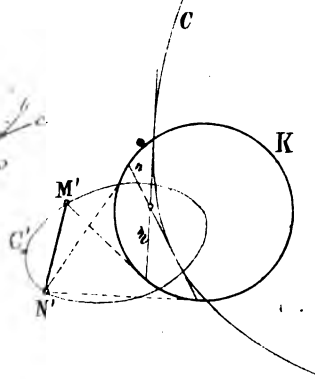
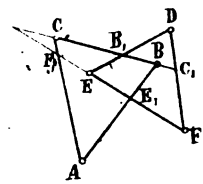
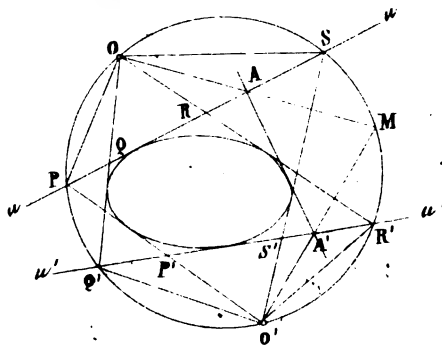
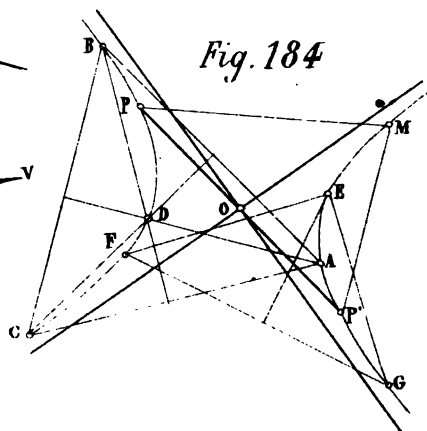
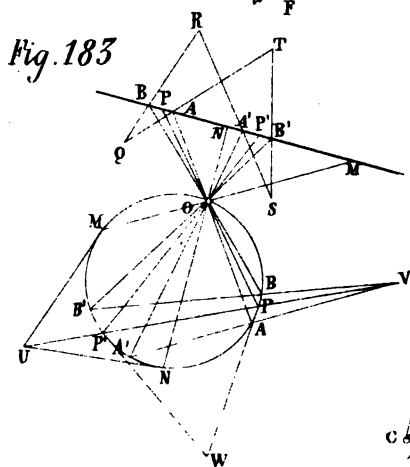
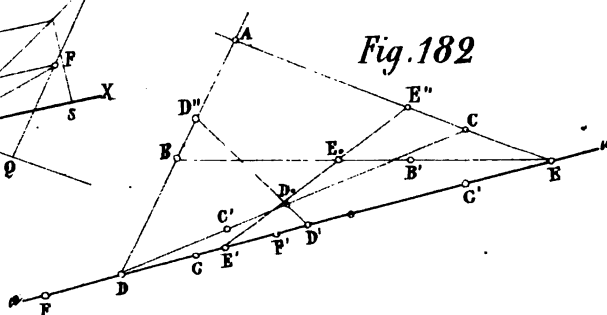
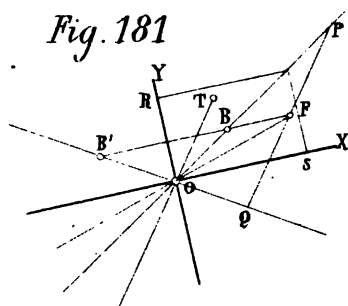
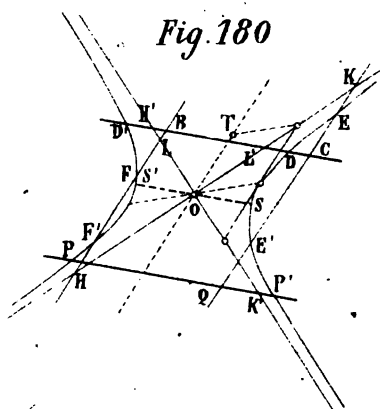
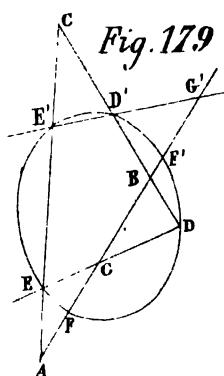
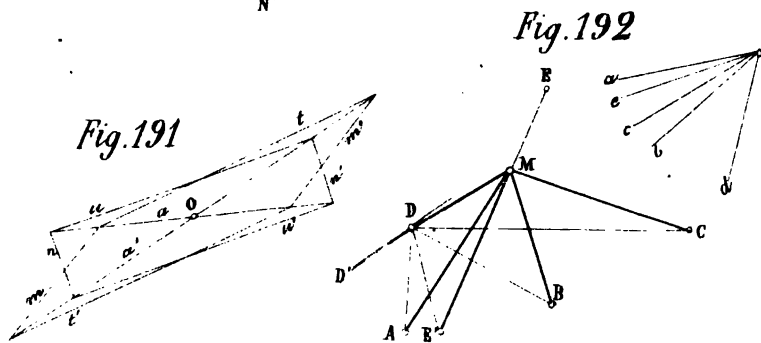
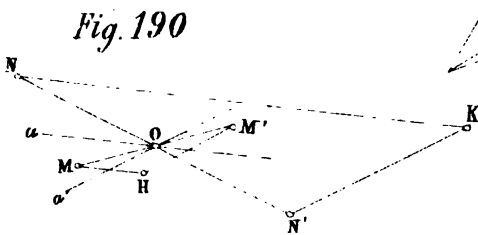
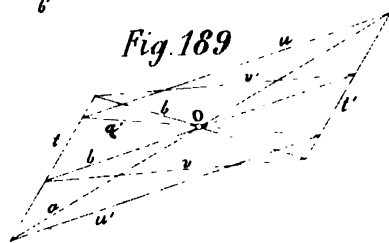
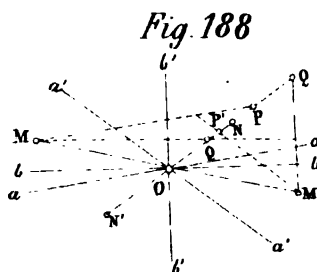
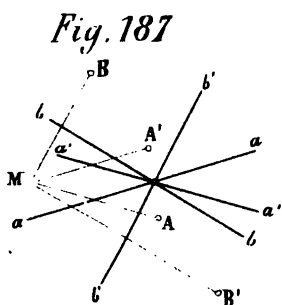
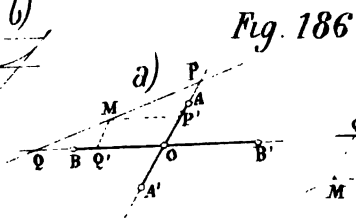
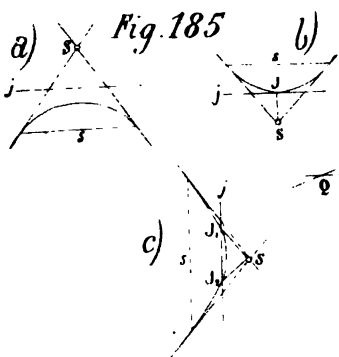
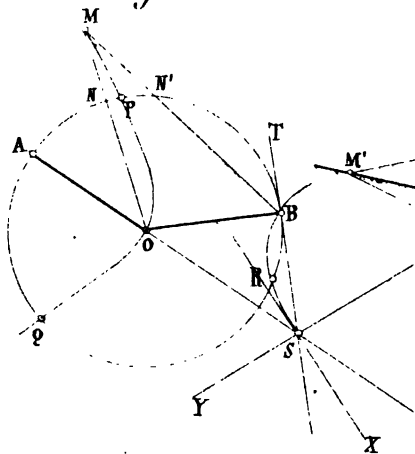
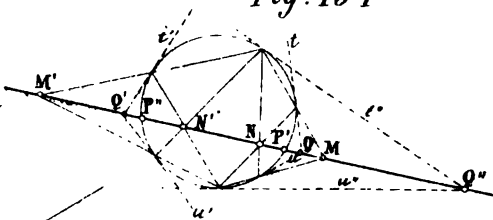
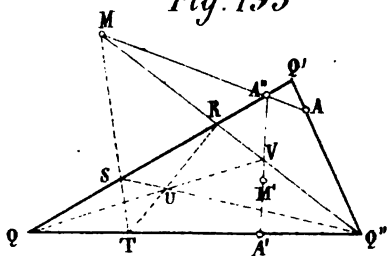
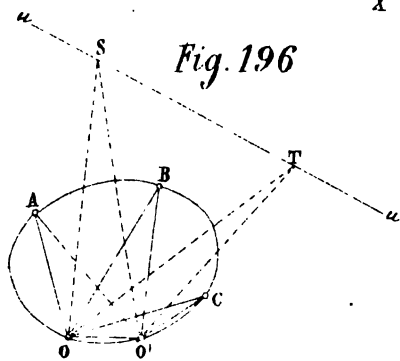
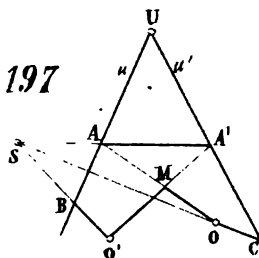
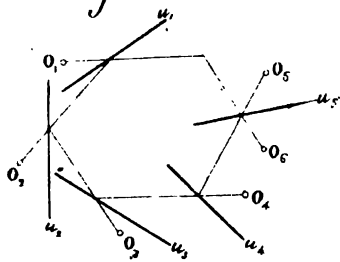



Fig. 193
Fig. 194
Fig. 195
Fig. 196
Fig. 197
Fig. 198
Fig. 199

Prezzo del Vol. I (Testo e Figure)

L. 3, 50